CAPÍTULO 9

Probabilidad

"Old West Action" Los acertijos pueden ser crucigramas, mensajes secretos y palabras en código. Otro tipo de acertijo son los *anagramas.* Estos son particularmente divertidos porque uno mismo crea el acertijo. Se elige una palabra o una frase y luego se reacomodan las letras para formar otra palabra o frase. Por ejemplo, "*Old West Action*" es un anagrama de *Clint Eastwood* (un actor de muchas películas del oeste).

La palabra inglesa *star,* tiene un número limitado de combinaciones—sólo 24 combinaciones, incluyendo *rats, tars* y *tsar.* Una palabra no tiene que ser muy grande para que existan miles o millones de formas diferentes de arreglar las letras que la forman. Por ejemplo, las letras del nombre *Clint Eastwood* se pueden acomodar de 1,556,755,200 maneras diferentes.

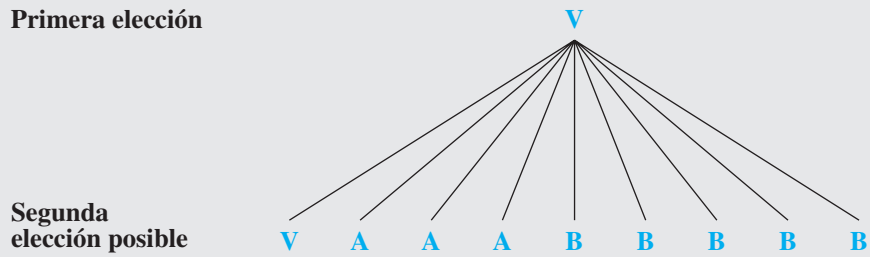
Piensa al respecto Escribe todos los anagramas que puedas, usando la palabra paso.

Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

Durante las siguientes semanas estudiaremos diversas situaciones relacionadas con la probabilidad. Para calcular la probabilidad de que algo ocurra, primero se deben determinar todos los resultados *posibles*. Por ejemplo, si se están sacando bloques de una bolsa que contiene 3 bloques azules, 2 verdes y 5 blancos, entonces existen 10 resultados posibles: uno por cada bloque. La probabilidad de sacar un bloque verde equivale a la razón del número de bloques verdes (2) entre el número total de resultados: $\frac{2}{10}$.

También vamos a analizar situaciones más complicadas. Por ejemplo, supongamos que se saca un bloque de la bolsa, se guarda en una caja, y luego se saca otro bloque de la bolsa. Aprenderemos a resolver problemas como la probabilidad de sacar un bloque verde primero y luego otro azul. Para esto, usaremos métodos del campo de las matemáticas conocido como análisis *combinatorio,* que permite calcular el número posible de combinaciones de objetos. Uno de estos métodos es el uso de diagramas de árbol, como el que se muestra de ejemplo en la figura anterior, para determinar los 10 resultados de la primera elección, así como los 9 resultados posibles en la segunda elección, dada la primera elección. El diagrama muestra las ramas de un diagrama de árbol, cuando la primera elección ha sido bloque verde:



Al final del capítulo, aplicaremos lo aprendido para analizar probabilidades en juegos complicados como las loterías estatales y las finales de eventos deportivos, así como para determinar si dichos juegos son igualmente justos para todos los participantes. Contestaremos preguntas como las siguientes:

- ¿Cuáles son las probabilidades de ganar en una lotería?
- ¿Cuál de los equipos es favorecido por el calendario de juegos durante la final?
- ¿Qué calendario de juegos es el más justo en determinada situación?

Vocabulario En este capítulo, sólo vamos a aprender un nuevo término: *espacio muestral*. Vamos a determinar el espacio muestral para calcular la probabilidad de diversos eventos.

¿Qué pueden hacer en el hogar?

Es probable que durante las siguiente semanas su hijo(a) muestre interés en asuntos relacionados con la probabilidad. Puede ayudarle a pensar en situaciones cotidianas en las que ocurren este tipo de eventos, como los juegos de lotería. O pueden inventar algún juego usando dados o giradores, en el cual sea necesario calcular probabilidades.

9.1 Estrategias para contar

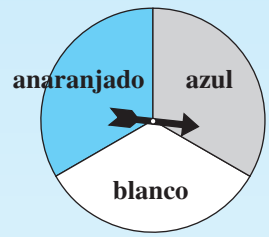
Una *probabilidad* es un número entre 0 y 1 que indica la probabilidad de que algo suceda. Con frecuencia, la clave para calcular la probabilidad de que algo ocurra es primero averiguar todos los *resultados* posibles.

Cuando lanzas una moneda al aire, los dos resultados posibles (cara o escudo) son equiprobables. Entonces, la probabilidad de sacar cara es 1 de 2, ó $\frac{1}{2}$, ó 0.5 ó 50%.

Piensa & comenta

Supón que giras los dos giradores siguientes. Cada girador tiene una oportunidad igual de apuntar hacia el blanco, azul o anaranjado.

Girador 1



Girador 2

Enumera todos los resultados posibles. Por ejemplo, un resultado es que el Girador 1 apunte al blanco y el Girador 2 apunte al anaranjado. Puedes utilizar la notación blanco/anaranjado, o BAn, para representar este resultado.

¿Cuántos resultados posibles existen?

¿En cuántos resultados el Girador 1 apunta al azul y el Girador 2 apunta al anaranjado? ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

¿En cuántos resultados un girador que apunta al azul y la otra apunta al anaranjado? ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

¿En cuántos resultados el Girador 2 apunta al azul? ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

En algunas situaciones, contar los resultados no es tan fácil como parece. En esta lección, investigarás algunas estrategias para contar.

CONTENTS

Investigación de laboratorio

Ingredientes para pizza

La Pizzería de Paula ofrece cuatro ingredientes para sus pizzas vegetarianas de queso.

Los clientes pueden ordenar una pizza con cualquier combinación de ingredientes, desde ningún ingrediente (solamente queso) hasta los cuatro ingredientes juntos. Sin embargo, un ingrediente puede usarse solamente una vez, un cliente no puede ordenar una pizza con dos porciones de pimientos verdes, por ejemplo.

MATERIALES

- cubos en 5 colores diferentes
- círculos para representar pizzas

Haz una predicción

1. ¿Cuántas pizzas diferentes crees que puedan hacerse utilizando estos cuatro ingredientes?

Pruébalo

Puedes explorar este problema al hacer un modelo. Utiliza los cubos de colores para representar los ingredientes y los círculos para representar las pizzas. Crea algunas pizzas colocando los cubos en los círculos. Recuerda, utiliza solamente una porción del ingrediente para cualquier pizza.

Mira si puedes hacer todas las pizzas posibles. Intenta encontrar una forma sistemática de organizar las pizzas para que te asegures que las encontraste todas.

2. Enumera todas las pizzas posibles. ¿Cuántas posibilidades hay?

Inténtalo otra vez

Ahora resolverás el problema nuevamente, pero con menos ingredientes disponibles para escoger. Mientras trabajas, busca un patrón en tus resultados que pueda confirmar tu respuesta al problema de las pizzas de cuatro ingredientes.

3. ¿Cuántas pizzas diferentes puedes hacer si sólo hay un ingrediente disponible?

4. ¿Cuántas pizzas diferentes puedes hacer si sólo hay dos ingredientes disponibles?

5. ¿Cuántas pizzas diferentes puedes hacer si sólo hay tres ingredientes disponibles?

6. Organiza tus resultados de las Preguntas 3 a la 5 en una tabla.

Ingredientes	1	2	3
Pizzas diferentes			

7. ¿Ves un patrón en tus resultados? Si es así, ¿el número de pizzas diferentes que hiciste con los cuatro ingredientes cabe en el patrón? Si no es así, revisa tu trabajo en las Preguntas 2 a la 5.

8. Supón que Paula agrega piña a la lista de ingredientes. ¿Cuántas combinaciones predices que son posibles ahora? Utiliza un quinto color para los cubos que represente la piña, y haz suficientes pizzas para ver un patrón y revisar tu predicción.

¿Qué aprendiste?

Repasa tus resultados en todos los problemas de las pizzas. Debes ver un patrón en ellos. Si no lo ves, revisa tu trabajo.

9. Utiliza el patrón en tus resultados para extender tu tabla hasta por lo menos 12 ingredientes. Puedes utilizar una calculadora, pero intenta completar la tabla sin utilizar los modelos de pizza hechos de papel y cubos.

10. Haz una lista de todos los ingredientes para pizza que conozcas. En un breve informe, explica cómo determinar el número de combinaciones que pueden hacerse de tu lista de ingredientes. En tu informe, también responde a esta pregunta:

Si ordenas un tipo de pizza diferente cada día, ¿cuántos días, semanas o meses pasarán antes de que hayas ordenado todas las posibilidades?

Investigación 1 Baloncesto uno a uno

Ally, Brevin, Carol y Doug están jugando baloncesto uno a uno. Para decidir los dos jugadores en cada juego, pusieron sus nombres en un sombrero y sacaron dos al azar.

Para encontrar la probabilidad de que Brevin y Carol jugarán el siguiente juego de uno a uno, puedes empezar por hacer una lista primero de todos los posibles pares entre los cuatro amigos. Cada par es un *resultado* en esta situación. El grupo de todos los resultados posibles (en este caso, el grupo de todos los pares posibles) se llama **espacio muestral.**

VOCABULARIO
espacio muestral

Existen muchas maneras de encontrar el espacio muestral para una situación particular, pero debes tener cuidado. Si hay muchos resultados posibles, puede ser difícil determinar si es que los enumeraste todos o si enumeraste un resultado más de una vez.

Serie de problemas A

Usarás un método sistemático para encontrar el espacio muestral a fin de sacar pares de nombres para la situación del baloncesto uno a uno.

1. Enumera todos los posibles pares de nombres que incluyan a Ally.

2. Enumera todos los posibles pares que incluyan a Brevin pero *no* a Ally (pues ya mencionaste ese par en el Problema 1).

3. Ahora enumera todos los pares que incluyan a Carol pero *no* a Ally ni a Brevin.

4. Revisa tus respuestas a los Problemas 1 al 3.

a. ¿Hay algún par que hayas enumerado más de una vez o que hayas pasado por alto? Si es así, corrige tus errores.

b. ¿Cuántos pares hay en total? Enuméralos.

5. Brevin quiere jugar contra Carol en el próximo juego.

a. ¿Cuántos pares combinan a Brevin con Carol?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Brevin juegue contra Carol en el próximo juego?

En la Serie de problemas A, calculaste que la probabilidad de que Brevin y Carol jueguen en el próximo juego es de $\frac{1}{6}$. Esto no significa necesariamente que en los siguientes seis sorteos el par de Brevin/Carol salga exactamente una vez. Es posible (aunque no muy probable) que se elija el par las seis veces o que el nombre de Carol no salga ni una sola vez.

Las probabilidades no te dicen qué es lo que pasará definitivamente. Te dicen lo que puedes esperar que *suceda a largo plazo.*

MATERIALES
- 4 tiras idénticas de papel
- un recipiente

Serie de problemas B

Escribe los cuatro nombres, *Ally, Brevin, Carol* y *Doug*, en tiras idénticas de papel y ponlas en el recipiente.

1. Supón que al azar (es decir, sin ver ni tratar de escoger un nombre por sobre otro) eliges 12 pares de nombres del recipiente, poniendo cada par de regreso en el recipiente después de cada elección. Basado en la probabilidad que encontraste en la Serie de problemas A, ¿cuántas veces esperarías elegir el par de Brevin/Carol?

Elige dos nombres al azar y registra los resultados. Devuelve los nombres al recipiente. Repite este proceso hasta que hayas elegido 12 pares.

2. ¿Cuántas veces elegiste el par de Brevin/Carol? ¿En qué se diferencian estos resultados experimentales con tu respuesta al Problema 1?

3. Cada grupo en tu clase eligió 12 pares de nombres. ¿Cuántos sorteos ocurrieron en tu clase? En este número de sorteos, ¿cuántas veces esperarías que se eligiera el par de Brevin/Carol?

4. Cada grupo en tu clase debe anotar ahora cuántas veces eligieron el par de Brevin/Carol. ¿Cuántas veces en total se eligió el par Brevin/Carol? ¿En qué se diferencia esto con tu respuesta al Problema 3?

A continuación investigarás qué sucede cuando un quinto jugador se añade a la situación del baloncesto uno a uno.

Serie de problemas C

1. Supón que Evan se une a Ally, Brevin, Carol y Doug.

a. ¿Cuántos nuevos pares pueden formarse ahora que no podían formarse antes de que Evan se integrara?

b. ¿Cuál es el tamaño del nuevo espacio muestral?

c. Para verificar el tamaño del nuevo espacio muestral, anota sistemáticamente todos los pares posibles. (En lugar de escribir los nombres completos, utiliza solamente la inicial de cada jugador.)

2. Observa el nuevo espacio muestral que enumeraste en el Problema 1.

a. ¿Cuántos pares incluyen a Evan? ¿Cuáles son?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo juego incluya a Evan?

En la Serie de problemas C, calculaste la probabilidad de que ocurriera el siguiente evento: *Evan está incluido en el par.* Este evento en particular tiene cuatro resultados en el espacio muestral: Evan/Ally, Evan/Brevin, Evan/Carol y Evan/Doug.

Si sabes que los resultados en un espacio muestral son *equiprobables* (o sea, que cada resultado tiene la misma oportunidad de ocurrir) es fácil calcular la probabilidad de un evento en particular.

EJEMPLO

Los nombres *Ally, Brevin, Carol, Doug* y *Evan* se ponen dentro de un sombrero y se saca al azar un par de nombres. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a Ally o Brevin (o ambos)?

El espacio muestral consiste en 10 resultados:

Ally/Brevin	Ally/Carol	Ally/Doug	Ally/Evan
Brevin/Carol	Brevin/Doug	Brevin/Evan	Carol/Doug
Carol/Evan	Doug/Evan		

De estos 10 resultados, 7 incluyen a Ally o Brevin:

Ally/Brevin	Ally/Carol	Ally/Doug	Ally/Evan
Brevin/Carol	Brevin/Doug	Brevin/Evan	

Ya que cada par tiene la misma oportunidad de ser elegido, la probabilidad de que el par incluya a Ally o Brevin es $\frac{7}{10}$.

Serie de problemas D

Los nombres *Ally, Brevin, Carol, Doug* y *Evan* se ponen en un sombrero y se elige al azar un par de nombres.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a Doug?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a Carol o Evan (o ambos)?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el par no incluya a Brevin?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a Ally o Brevin o Doug?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a Carol pero no a Doug?
6. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a Ally y Evan?
7. Inventa una pregunta como las de los Problemas 1 al 6 que incluya un evento con una oportunidad de ocurrir de 2 en 10.
8. Inventa otra pregunta como las de los Problemas 1 al 6 y da la respuesta a tu pregunta.

Comparte & resume

Si todos los resultados en un espacio muestral son equiprobables, ¿cómo puedes calcular la probabilidad de que ocurra un evento en particular?

Investigación 2 Más estrategias para contar

Ya has visto que para encontrar la probabilidad de un evento, debes encontrar el tamaño del espacio muestral. En la Investigación 1, utilizaste una estrategia sistemática para enumerar todos los posibles pares para un partido de uno a uno. En esta investigación, descubrirás otras estrategias útiles para contar.

Piensa & comenta

Jesse y Marcus tienen los cinco cedés de su banda favorita, X Cuadrada:

- *Ansiedad algebraica*
- *Binomios averiados*
- *Calculando con calma*
- *Demasiados problemas*
- *El perro se comió mi tarea*

Los amigos quieren escuchar todos los cinco cedés. Predice el número de arreglos diferentes en que pueden tocarlos.

Para calcular el número de formas en se puede ordenar el grupo de cedés, puedes enumerar todas las probabilidades. Con solamente un cedé, existe obviamente un solo arreglo. Con dos cedés (llámalos A y B) existen dos arreglos posibles: AB y BA. Con tres cedés, existen seis arreglos:

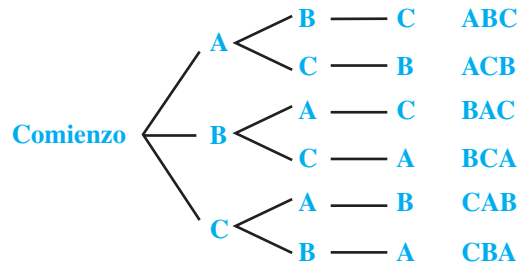
ABC ACB BAC BCA CAB CBA

La tabla y el diagrama de árbol muestran cómo se pueden ordenar o enumerar estos cedés. Una lista en que el orden es importante se llama *permutación*.

Para asegurarte que no olvidaste ninguna posibilidad, necesitas un método sistemático para contar y anotar. Puedes enumerar las posibilidades para tres cedés en una tabla.

A primero	B primero	C primero
ABC	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

O podrías organizarlos utilizando un *diagrama de árbol*.



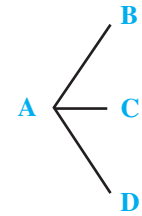
El diagrama de árbol funciona de manera similar a la tabla. Muestra que hay tres formas de empezar: A, B o C. Luego hay dos opciones para el segundo cedé y una opción para el tercero.

Serie de problemas E

Considera el caso de cuatro cedés: A, B, C y D.

1. Predice el número de maneras en que pueden ordenarse estos cuatro cedés.
2. Haz una lista organizada de todas las posibilidades en que se toca A primero. Para hacer esto, haz un diagrama de árbol como el que aparece a la derecha:

A primero
ABCD
ABDC
ACBD
⋮



3. El número de arreglos de cuatro cedés en que A es el primero es igual al número total de formas en que pueden ordenarse tres cedés. Explica por qué.
4. ¿Por qué el número diferentes de arreglos de cuatro cedés en que B es el primero es igual al número de arreglos de cuatro cedés en que A es el primero?
5. Enumera todos los arreglos en que B es el primero. Luego enumera todos los arreglos en que C es el primero. Por último, enumera todos los arreglos en que D es el primero. Usa tu respuesta del Problema 4 para verificar que hayas enumerado todas las posibilidades.
6. ¿Cuántos arreglos posibles hay en total? Si sabes cuántas anotaciones hay en cada lista, ¿cómo puedes calcular el número total de entradas sin contarlas todas?
7. ¿Es tu estimación del Problema 1 mayor o menor que el número verdadero de arreglos?
8. Ahora regresa al problema que se presentó en Piensa & comenta de la página 551: ¿en cuántos arreglos diferentes pueden Jesse y Marcus tocar sus cinco cedés? Intenta calcular la respuesta *sin* enumerar todas las posibilidades. Muestra cómo la calculaste.

CONTENTS

Si consideras los arreglos de los cedés como los resultados en un espacio muestral, puedes calcular las probabilidades de eventos específicos.

EJEMPLO

Considera todos los arreglos de los cuatro cedés: A, B, C y D. Si uno de estos arreglos se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que B aparezca antes que D?

En la Serie de problemas E, encontraste que hay 24 resultados en el espacio muestral para esta situación. B aparece antes que D en 12 de los 24 resultados.

ABCD	BACD	CABD
ABDC	BADC	CBAD
ACBD	BCAD	CBDA
	BCDA	
	BDAC	
	BDCA	

Entonces, la probabilidad de que B se toque antes que D es de $\frac{12}{24}$ ó 50%.

En la Serie de problemas F, encontrarás la probabilidad de otros eventos que implican el orden en el que se pueden tocar los cuatro cedés.

Serie de problemas F

En los Problemas 1 al 7, calcula la probabilidad de que ocurra un evento dado. Antes de comenzar, asegúrate de tener una lista completa de los 24 resultados en el espacio muestral para esta situación.

1. C sigue inmediatamente a B.

2. A toca al final.

3. C no se toca primero.

4. B toca antes que A.

5. D se toca primero *y* A se toca de último.

6. Los cedés se tocan en el orden CBAD.

7. A se toca primero *y* C no se toca de último.

8. La probabilidad de que A se toque al final es la misma que la probabilidad de que B se toque al final. Explica por qué.

9. ¿Por qué las posibilidades de que A se toque al final son las mismas de que A se toque al principio?

10. ¿Cómo puedes usar las posibilidades de que C se toque primero para revisar tu respuesta al Problema 3?

11. Si la probabilidad de un evento es $\frac{1}{4}$, ¿cuál es la probabilidad de que el evento *no* ocurra? Explica cómo encontraste tu respuesta.

12. Si la probabilidad de un evento es p, donde p es un número entre 0 y 1, ¿cuál es la probabilidad de que el evento no ocurra?

Describe un evento relacionado con el problema de los cedés con las probabilidades dadas.

13. $\frac{6}{24}$ **14.** $\frac{22}{24}$ **15.** $\frac{24}{24}$ **16.** $\frac{3}{24}$

Comparte & resume

1. Kai encontró un atajo para determinar el número de maneras para ordenar los cedés. Pensó: "Para cinco cedés, multiplica 5 por el número de formas en que se pueden poner cuatro cedés en orden. De hecho, para n cedés, sólo multiplica n por el número de formas para poner $n - 1$ cedés en orden".

a. Solamente existe una forma para ordenar un cedé. Usa el método de Kai para encontrar el número de formas en que se pueden ordenar dos cedés. ¿Funcionó?

b. Utiliza el método de Kai y tu respuesta a la Parte a para encontrar el número de formas en que se pueden ordenar tres y cuatro cedés. ¿Funcionó?

c. Explica por qué el método de Kai tiene sentido.

d. ¿Cuántas formas hay para ordenar siete cedés?

2. Lucita pensó que podría usar la estrategia de la Serie de problemas E para encontrar el número de parejas uno a uno de Ally, Brevin, Carol y Doug. Ella comenzó por enumerar las posibilidades.

Ally primero
Ally/Brevin
Ally/Carol
Ally/Doug

Lucita dijo: —Existen tres resultados en esta lista, y habrá cuatro listas (una para cada amigo) así que hay 12 pares en total. ¿Está en lo correcto? Explica.

Investigación 3 Estrategias para contar con el uso de patrones

En la Investigación 1, encontraste el tamaño del espacio muestral haciendo una lista de todas las posibilidades (todos los pares de uno a uno). En la Investigación 2, observaste que algunas veces puedes descubrir un patrón que te permite encontrar el número total de resultados sin tener que enumerarlos todos. En esta investigación, explorarás otras estrategias para contar.

Recuerda

Los números enteros son enteros no negativos, o los números 0, 1, 2, 3, ...

Piensa & comenta

Dos números enteros suman 12. ¿Cuáles podrían ser estos números?

Enumera cada par de números enteros que sumen 12. Asegúrate de haber enumerado todas las posibilidades. ¿Cuántos pares hay? (En esta situación el orden no importa. El par 3-9 es el mismo que el par 9-3.)

Predice cuántos pares de números enteros pueden sumar 100.

Una estrategia para encontrar el número de pares de números enteros que sumen 100 es considerar primero algunos problemas más simples y buscar un patrón.

Serie de problemas G

1. La suma de dos números enteros es 10. Tres pares posibles son 0-10, 1-9 y 2-8. ¿Cuáles son los otros pares? ¿Cuántos pares hay en total?

2. Ahora anota todos los pares de números enteros que sumen 11. ¿Cuántos pares hay?

3. Regresa al Piensa & comenta de esta página. ¿Cuántos pares de números enteros suman 12?

4. Copia y completa la tabla para mostrar el número de pares de números enteros para cada suma.

Suma	10	11	12	13	14	15	16
Número de pares							

5. Copia esta tabla y utiliza cualquiera de los patrones que has observado para encontrar el número de pares de números enteros para cada suma dada.

Suma	20	27	40	80	100	275
Número de pares						

6. Observa las sumas pares e impares y el número de combinaciones que las producen.

a. Escribe dos expresiones (una para las sumas pares y otra para las sumas impares) que describan la relación entre la suma S y el número de pares de números enteros que producen esa suma.

b. Explica porqué las expresiones para las sumas pares y las sumas impares son diferentes.

Una vez que conoces el tamaño del espacio muestral, puedes calcular la probabilidad de que un evento ocurra.

Serie de problemas H

Utiliza los patrones y las respuestas que encontraste en la Serie de problemas G para determinar estas probabilidades.

1. Todos los pares de números enteros que suman 20 se ponen dentro de un sombrero y se elige uno al azar.

a. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral en esta situación?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los números en el par seleccionado sea mayor que 14? Explica cómo encontraste tu respuesta.

2. Todos los pares de números enteros que suman 100 se ponen dentro de un sombrero y se elige uno al azar.

a. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral en esta situación?

b. ¿En cuántos pares ambos números son menores que 60? Enuméralos.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números en el par seleccionado sean menores que 60?

3. Todos los pares de números enteros que suman 55 se ponen dentro de un sombrero y se elige uno al azar.

a. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral en esta situación?

b. ¿Cuántos pares incluyen un número mayor a 48? Enuméralos.

c. ¿Cuál es la probabilidad de escoger un par en que ninguno de los dos números sea mayor a 48?

Hasta ahora, has utilizado tres estrategias para encontrar el tamaño del espacio muestral:

- Enumerar todas las posibilidades sistemáticamente.
- Comenzar una lista sistemática de las posibilidades y buscar un patrón que te ayudará a encontrar el número total, sin tener que completar toda la lista.
- Empezar con casos más simples y buscar un patrón lógico que puedas extender a los casos más complicados.

En la Serie de problemas I, encontrarás el tamaño del espacio muestral al dividirlo en partes manejables. El problema en el que trabajarás es similar a los de la Serie de problemas G, pero un poco más complicado.

CONTENTS

Serie de problemas

Considera este problema: *Tres números enteros tienen una media de 3. ¿Cuántos triples de números enteros de este tipo pueden existir? ¿Cómo puedes asegurarte de haberlos encontrado todos?* Aquí hay una forma para estudiar este problema.

1. Si la media de tres números enteros es 3, ¿cuál es su suma? ¿Por qué?

Ahora puedes replantear este problema para encontrar todas las combinaciones de tres números que sumen 9.

2. Cuando enumeras las combinaciones de los tres números enteros que suman 9, ¿es importante el *orden* de los números? Por ejemplo, el triple 1-2-6 ¿se considera igual o diferente que la combinación 6-2-1?

3. Una forma de dividir el problema en partes manejables es comenzar por pensar en todas las combinaciones de tres números enteros donde por lo menos un número sea 0. Enumera todos los triples que sumen 9. ¿Cuántos hay?

4. Para continuar enumerando las combinaciones, podrías decidir encontrar todas aquellas combinaciones que contengan por lo menos un 1 pero ningún 0.

a. ¿Por qué excluirías los ceros de los triples en esta etapa?

b. Enumera los triples que contengan por lo menos un 1 pero ningún 0. ¿Cuántos hay?

5. Continúa este proceso. Enumera todos los triples que contengan por lo menos un 2 pero ningún 0 ó 1, y luego todos los triples que incluyan por lo menos un 3 pero ningún 0, 1 ó 2. Completa la tabla.

Número menor en el triple	0	1	2	3
Número de triples	5			

6. ¿Por qué no se necesitan más columnas en esta tabla? En otras palabras, explica por qué no necesitas considerar los triples en donde el número más pequeño sea 4, 5 ó cualquier número mayor.

7. ¿Cuántos triples diferentes hay en total?

8. Si todos los triples se ponen dentro de un sombrero, ¿cuál es la probabilidad de elegir una combinación donde el número más pequeño sea 0? ¿Y donde el número más pequeño sea 4?

9. Utiliza la estrategia de dividir el problema en partes más pequeñas para encontrar el número de triples de números enteros cuya media sea 4.

Comparte & resume

Una serie de cuatro números tiene una media de m. Explica cómo encontrarías el número de conjuntos de números enteros que se ajustan a esta descripción.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Tres amigos (Avery, Batai y Chelsea) se reúnen para jugar ajedrez. Para determinar quién jugará contra quién, ponen sus nombres dentro de un sombrero y eligen dos al azar.

a. Enumera todos los pares posibles de nombres.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Batai y Chelsea se enfrenten en el próximo juego?

c. Tres amigos más (Donae, Eric y Fran) se unen al grupo. ¿Cuántos pares posibles hay ahora? Enuméralos.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima partida la jueguen Avery o Eric (o ambos)?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima partida *no* incluya a Batai?

2. **Deportes** Te han pedido que organices los partidos para las competencias individuales en tu club local de tenis. Hay siete jugadores en la competencia y cada uno debe jugar contra cada jugador una vez.

a. Los partidos para el Jugador A aparecen en la siguiente lista. Nota que esta lista ya incluye el partido del Jugador A contra el Jugador B. Copia la tabla, y en la fila del Jugador B enumera todos los otros partidos que el Jugador B debe jugar. (En otras palabras, enumera todos los partidos que incluyen al Jugador B pero *no* incluyen al Jugador A.)

Jugador	Partidos por jugar	Número de partidos
A	AB, AC, AD, AE, AF, AG	6
B		
C		
D		
E		
F		
G		

b. Predice el número de partidos que el Jugador C debe jugar que *no* incluyan a los Jugadores A o B. Escribe tu predicción en la columna "Número de partidos".

c. Predice el número de partidos para los jugadores restantes. En cada caso, considera sólo aquellos partidos que *no* incluyan a los jugadores enumerados por encima de ese jugador.

d. Revisa tus predicciones haciendo una lista de los partidos para cada jugador.

e. Describe el patrón en la columna de "Número de partidos". ¿Por qué crees que ocurre este patrón?

f. Encuentra el número total de partidos que se jugarán en la competencia individual.

g. Usa lo que descubriste en este problema para predecir el número total de partidos en una competencia individual con ocho jugadores. Explica cómo encontraste tu respuesta.

3. Petra quiere hacer un retiro de dinero del cajero automático, pero no puede recordar su número de identificación personal. Ella sabe que incluye los dígitos 2, 3, 5 y 7, pero no puede recordar el orden. Decide intentar todos los arreglos posibles hasta que encuentre el correcto.

a. ¿Cuántos arreglos son posibles?

b. Petra recuerda que el primer dígito es un número impar. ¿Cuántos arreglos son posibles ahora?

c. Petra luego recuerda que el primer dígito es 5. ¿Cuántos arreglos son posibles ahora?

4. El botón de "Shuffle" en el reproductor de cedés de Tamika toca las canciones en orden aleatorio. Tamika pone un cedé de cuatro canciones en el reproductor y oprime la función de "Shuffle".

a. ¿En cuántas formas se pueden ordenar las cuatro canciones?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la Canción 1 se toque primero?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la Canción 1 *no* se toque primero?

d. Las Canciones 2 y 3 son las favoritas de Tamika. ¿Cuál es la probabilidad de que *una* de estas dos canciones se toque primero?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que las Canciones 2 y 3 sean las primeras dos en tocarse (en cualquier orden)?

5. Todos los pares de números enteros que suman 26 se ponen dentro de un sombrero y se elige uno al azar.

a. Enumera todos los pares de números enteros posibles que sumen 26.

b. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral en esta situación?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los números en el par seleccionado sea mayor o igual a 15? Explica cómo encontraste tu respuesta.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos números en el par seleccionado sean menores que 15? Explica.

6. **Reto** Todos los pares de números enteros que suman 480 se ponen dentro de un sombrero y se elige uno al azar.

a. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral en esta situación?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los números en el par seleccionado sea mayor que 300? Explica cómo lo supiste.

7. Tres números enteros tienen una media de 5.

a. Enumera todos los triples de números enteros que tengan una media de 5 y explica cómo sabes que los encontraste todos.

b. ¿Cuántos triples de números enteros de este tipo existen?

c. Supón que todos los triples de números enteros con una media de 5 se ponen dentro de un sombrero y se elige uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de los números en el triple sean iguales?

Conecta & amplía

8. La familia Álvarez (Amelia, Bernie, Carlos, Dina, Eduardo y Flora) quieren formar dos equipos de tres integrantes para jugar a las adivinanzas. Ponen sus nombres dentro de un sombrero y escogen tres nombres para formar un equipo. Los tres jugadores restantes formarán el otro equipo.

a. ¿Cuántos equipos diferentes son posibles? Enuméralos todos.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres nombres elegidos incluyan a Amelia o Eduardo (o ambos)?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres nombres elegidos incluyan tanto a Amelia como a Eduardo?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres nombres elegidos no incluyan ni a Amelia ni a Eduardo?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Amelia y Eduardo estén en el mismo equipo? Explica cómo encontraste tu respuesta.

9. Cinco amigos de séptimo grado (Anya, Ben, Calvin, Dan y Ezra) desafiaron a cinco amigos de octavo grado (Vic, Wendi, Xavier, Yvonne y Zac) a un torneo de backgammon. Pusieron los nombres de los amigos de séptimo en un sombrero y los nombres de los de octavo en otro. Para determinar los dos jugadores de cada partida, sacaron un nombre de cada sombrero.

a. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral en esta situación? Es decir, ¿cuántos pares diferentes de nombres son posibles? Explica.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente partida incluya a Anya pero no a Xavier o a Yvonne?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente par seleccionado no incluya a Calvin?

d. Supón que los 10 nombres se ponen sólo en un sombrero y que se eligen dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el par incluya a alguien de séptimo grado y alguien de octavo grado? Explica.

10. Kai está ayudando a planificar un día de campo escolar. Cada almuerzo incluirá un emparedado, un acompañamiento y un postre. Las opciones posibles para cada uno aparecen a continuación.

Emparedado	Acompañamiento	Postre
mantequilla de maní	ensalada	fruta fresca
queso	papas fritas	galleta
ensalada de huevo		pastel de queso
		tarta

a. ¿Cuántas combinaciones diferentes de almuerzo son posibles?

Kai y sus colaboradores hacen un número igual de bolsas para cada combinación, pero olvidaron marcarlas. Suponte que cuando una persona toma una bolsa, cada combinación tiene la misma probabilidad de estar dentro de la bolsa que cualquier otra.

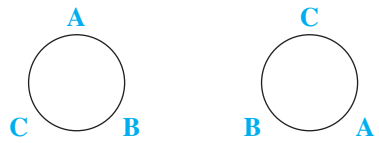
b. A Bharati no le importa el postre que reciba, pero realmente quiere un emparedado de huevo y una ensalada. ¿Cuál es la probabilidad de que su almuerzo incluya estos dos elementos?

c. A Evan no le gustan los huevos. ¿Cuál es la probabilidad de que escoja una bolsa que *no* incluya un emparedado de ensalada de huevo?

11. En este ejercicio, pensarás acerca de las diferentes maneras en que un número de personas pueden sentarse a lo largo de una banca y alrededor de una mesa circular.

a. ¿En cuántas maneras pueden sentarse tres personas (llámalas A, B y C) a lo largo de una banca? Enumera todas las posibilidades.

b. Si las tres personas están acomodadas alrededor de una mesa circular, no habrá un punto para comenzar o terminar. Entonces, por ejemplo, estos dos arreglos se consideran iguales.



¿En cuántas maneras *diferentes* pueden acomodarse tres personas alrededor de una mesa circular? Esboza todas las posibilidades.

c. Copia y completa la tabla para mostrar en cuántas maneras puede acomodarse un número dado de personas a lo largo de una banca y alrededor de una mesa circular.

Personas	Arreglos por fila	Arreglos en círculo
1	1	1
2		
3		
4		

d. Describe por lo menos un patrón que observes en tu tabla.

e. Cinco personas pueden acomodarse a lo largo de una banca en 120 maneras diferentes. Utiliza los patrones en tu tabla para predecir el número de formas en que cinco personas pueden sentarse alrededor de una mesa circular.

12. Un programador escribió un software que compone piezas de música al combinar segmentos musicales al azar. Para cada pieza, el programa escoge 4 diferentes segmentos al azar de un grupo de 20 posibles segmentos y los combina en un orden aleatorio.

¿Cuántas piezas musicales diferentes pueden crearse de esta manera? (Ayuda: ¿Cuántas opciones hay para el primer segmento? Para cada una de ellas, ¿cuántas opciones hay para el segundo segmento?)

CONTENTS

En tus propias palabras

Explica dos estrategias para contar que puedes utilizar para encontrar el tamaño de un espacio muestral.

13. La Srta. McDonald sólo cría pollos y cerdos en su granja. Si sabes cuántas patas hay en el granero de la Srta. McDonald, puedes encontrar todas las posibles combinaciones de cerdos y pollos. Por ejemplo, si hay 6 patas, puede haber 3 pollos ó 1 pollo y 1 cerdo.

a. Copia y completa la tabla para mostrar las combinaciones posibles para los diferentes números de patas. La notación 3P-0C significa 3 pollos y ningún cerdo.

Patas	Combinaciones	Número de combinaciones
2	1C-0P	1
4		
6	3C-0P, 1C-1P	2
8		
10		
12		
14		

b. Predice el número de combinaciones para 16 patas y para 18 patas. Revisa tus predicciones haciendo una enumeración de todas las posibilidades.

c. **Reto** Escribe dos expresiones que describan el número de combinaciones de pollo-cerdo para un número L de patas. Una de tus expresiones debe ser para los valores de L que sean múltiplos de 4, la otra debe ser para los valores de L que no sean múltiplos de 4.

d. Hay 42 patas en el granero. Si suponemos que cada posible combinación de cerdos y pollos es equiprobable, ¿cuál es la probabilidad de que haya 8 cerdos y 5 pollos en el granero?

Repaso mixto

Escribe una ecuación de la recta que es paralela a la recta dada.

14. $2(y - 3) = {}^{-}7x + 1$ **15.** $x = {}^{-}2 - y$

Vuelve a escribir cada expresión utilizando una sola base y un solo exponente.

16. $2^5 \cdot 2^{-8} \cdot 2^{2p}$ **17.** $({}^{-}3^{3m})^6$ **18.** $k^7 \cdot 2^7$

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en la recta numérica.

19. $5(9 - x) \leq 4(x + 18)$ **20.** $3x - 9 < {}^{-}4.5x + 6$

Factoriza cada expresión.

21. ${}^{-}3x^2 + 3x + 18$ **22.** $0.5a^2 - 2a - 16$

Copia cada expresión y añade una constante para completar el cuadrado.

23. $a^2 + 0.4a +$ _____ **24.** $b^2 - 12b +$ _____

25. Supón que cierto tipo de célula se divide en dos cada media hora.

a. Haz una tabla que muestre cuántas células habrá al final de cada hora, empezando por una célula, por un período de 4 horas.

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5
Células	1					

b. Escribe una ecuación para el número de células c en t horas.

c. Grafica los datos de tu tabla, mostrando tiempos de hasta 4 horas en el eje horizontal.

26. Relaciona estas 12 expresiones para crear seis pares de expresiones donde una expresión sea la versión reducida de la otra.

a. $\frac{4}{9} - \frac{x+1}{9}$ **b.** $\frac{5}{6x} - \frac{1}{4x}$ **c.** $\frac{2}{9x} - \frac{5}{6x}$

d. $\frac{4+x}{^-2x-8}$ **e.** $-\frac{11}{18x}$ **f.** $\frac{x}{4x} - \frac{x}{3x}$

g. $\frac{7}{12x}$ **h.** $\frac{^-x+3}{9}$ **i.** $-\frac{1}{12}$

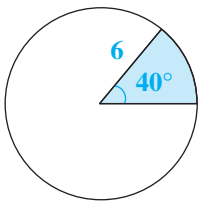
j. $\frac{1}{(x-2)^2}$ **k.** $\frac{1}{x(x-4)+4}$ **l.** $^-0.5$

Geometría El área del sector de un círculo se encuentra al multiplicar la razón de la medida del ángulo del sector sobre 360 por el área del círculo:

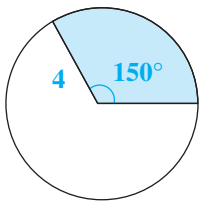
$$\text{área del sector} = \frac{\text{medida del ángulo del sector (en grados)}}{360°} \cdot \pi r^2$$

Encuentra el área de cada sector.

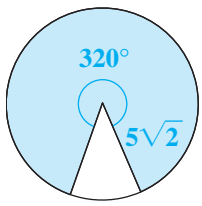
27.



28.

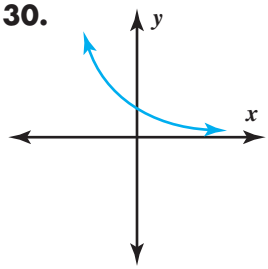


29.

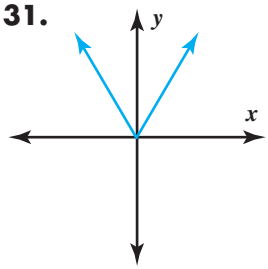


Di si cada relación es una función.

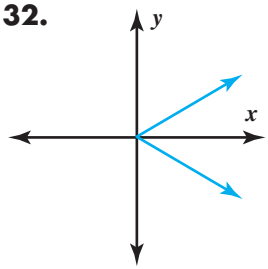
30.



31.



32.



CONTENTS

9.2 Distribuciones de probabilidad

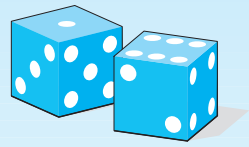
Supón que estás planificando un viaje de campamento. Si crees que es posible que llueva durante el viaje, probablemente empacarás un impermeable, botas, una carpa y otros utensilios para la lluvia.

El entender la probabilidad de ciertos eventos puede ayudarte a tomar decisiones y a hacer predicciones. A veces, puedes usar el sentido común o la lógica para decidir si un evento es más probable que otro.

En algunas situaciones, puedes determinar qué es más probable que ocurra sólo después de un análisis más cuidadoso. En esta lección, analizarás situaciones y juegos para determinar la probabilidad de ciertos eventos.

Piensa & comenta

Enumera todos los resultados posibles de lanzar dos dados, uno después del otro.



¿Son todos los resultados igualmente probables?

¿Cuál es la probabilidad de que obtengas números dobles (ambos dados muestran el mismo número)?

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos un dado muestre un 3?

¿Qué es más probable: lanzar por lo menos un 3 ó sacar dobles? ¿Podrías haber contestado esta pregunta sin contar todas las combinaciones para cada una? Explica.

Investigación 1 Compara probabilidades de eventos

Ahora verás las probabilidades que resultan de lanzar los dos dados y determinarás cuál de los dos eventos es más probable.

MATERIALES
2 dados

Serie de problemas A

Tamika lanzó los dos dados 15 veces. En cada lanzamiento, multiplicó los dos números. Basándose en sus hallazgos, conjeturó que sacar un producto par es más probable que uno impar.

1. Lanza un par de dados 15 veces y anota si cada producto es par o impar. ¿Tus resultados apoyan la conjetura que hizo Tamika?

Para averiguar si es que un producto par o impar es más probable, podrías encontrar los productos para todos los 36 posibles tiros y contar cuántos son pares y cuántos son impares.

Una forma más fácil de analizar la conjetura de Tamika es utilizar lo que sabes acerca de multiplicar factores pares e impares. En cada dado, la probabilidad de sacar un número impar es igual que la probabilidad de sacar un número par, así que puedes simplemente calcular si es que cada posible combinación es impar o par:

par × par par × impar impar × par impar × impar

2. Copia y completa la tabla para mostrar si es que el producto de cada combinación de factores pares o impares es a su vez par o impar.

Dado 1

Dado 2	×	Par	Impar
	Par	par	
	Impar		

3. ¿Qué es más probable que ocurra: un producto par o un producto impar?

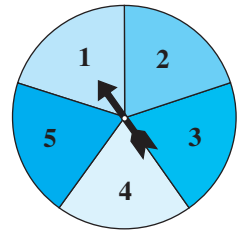
4. Completa estos enunciados de probabilidad.

a. La probabilidad de que el producto de los dos dados sea par es de ____ de 4.

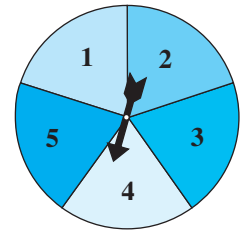
b. La probabilidad de que el producto de los dos dados sea impar es de ____ de 4.

CONTENTS

5. Supón que, en vez de lanzar los dados para determinar los factores a multiplicar, Tamika gira estos giradores.



Girador 1



Girador 2

a. Predice si un producto par o un producto impar es más probable.

b. ¿Puedes utilizar tu tabla del Problema 2 para determinar si es que un producto impar o par es más probable? ¿Por qué sí o por qué no?

c. Determina sistemáticamente la probabilidad de sacar un producto par y la probabilidad de sacar un producto impar. Podría serte útil completar una tabla de multiplicación como la que aparece abajo.

Girador 1

Girador 2	×	1	2	3	4	5
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Algunos juegos se basan completamente en usar destrezas, algunos se basan en la suerte y algunos se basan en una combinación de ambas cosas.

MATERIALES

2 dados

Serie de problemas B

Tamika también tenía curiosidad sobre qué pasaría si lanzaba los dos dados y consideraba un número como la base y el otro como su exponente. ¿El resultado sería más probablemente par o impar?

1. Conduce un experimento para predecir si es que un resultado par o impar es más probable. Antes de comenzar, señala un dado como la base y el otro como el exponente. Lanza los dados 15 veces y anota si el resultado, $dado1^{dado2}$, es par o impar. Haz una predicción que se base en tus resultados.

2. Ya que un número impar es tan probable de ocurrir como un número par, puedes analizar las posibles combinaciones como lo hiciste en la Serie de problemas A. Completa la tabla para indicar si es que elevar la base dada al exponente dado tiene un resultado par o impar.

	Exponente par	Exponente impar
Base par		
Base impar		

3. ¿Qué es más probable que ocurra: un resultado par o un resultado impar?

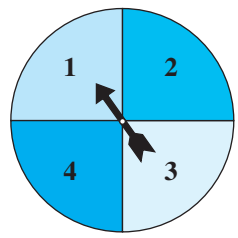
4. Completa estos enunciados de probabilidad.

a. La probabilidad de que $dado1^{dado2}$ sea par es ____.

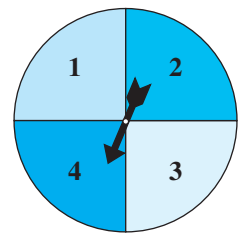
b. La probabilidad de que $dado1^{dado2}$ sea impar es ____.

Comparte & resume

Supón que giraste estas dos giradores y sumaste los resultados. Describe dos maneras en que podrías determinar si es más probable que una suma sea impar o par.



Girador Y



Girador Z

CONTENTS

Investigación 2 El juego de ¿Cuál es la diferencia?

Muchos juegos tienen que ver con la suerte. Averiguar las probabilidades de los eventos que suceden en un juego puede ayudarte a determinar si es que el juego es justo.

MATERIALES
- 2 dados
- papel cuadriculado

Serie de problemas C

Héctor y Mikayla están jugando un juego que se llama *¿Cuál es la diferencia?* En cada ronda, cada uno lanza un dado y encuentran la diferencia entre los números. Cuando los números son diferentes, restan el número menor del número mayor.

- El jugador 1 anota 1 punto si la diferencia es 0, 1 ó 2.
- El jugador 2 anota 1 punto si la diferencia es 3, 4 ó 5.

Cada juego consta de diez rondas (tiros de los dados).

1. ¿Quién crees que tenga más probabilidad de ganar una ronda, el Jugador 1 ó el Jugador 2?

2. Con un compañero, juega 10 rondas de *¿Cuál es la diferencia?* Anota quién gana. Luego, sin cambiar de lado (es decir, califica el segundo juego igual que el primero) juega otras 10 rondas. ¿Ganó el mismo jugador ambos juegos?

3. Puedes analizar este juego al hacer una tabla de diferencias para todos los tiros posibles. Completa esta tabla para mostrar la diferencia para cada lanzamiento posible.

Tiro del Jugador 2

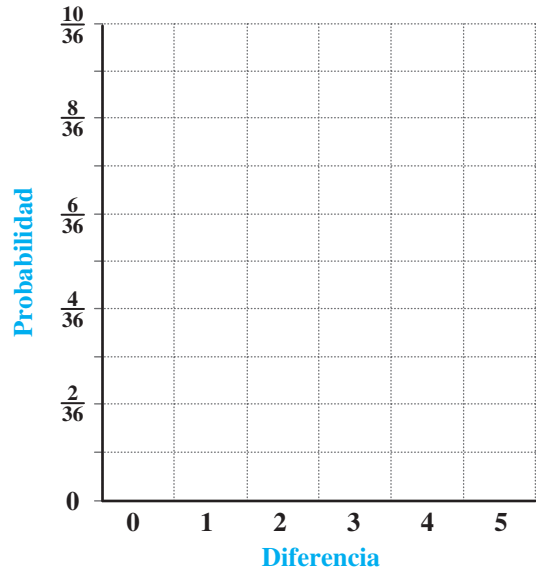
Tiro del Jugador 1	–	1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

4. ¿Cuántos de los 36 tiros de los dados producen una diferencia de 5? ¿Cuáles son estos tiros?

5. Completa la tabla para mostrar la probabilidad de sacar cada diferencia.

Diferencia	0	1	2	3	4	5
Probabilidad						

6. Haz una gráfica de barras para mostrar la probabilidad de cada diferencia. Tu gráfica de barras completa mostrará la *distribución de la probabilidad*—cómo se distribuyen las probabilidades entre las posibles diferencias.



7. Recuerda que el Jugador 1 anota un punto si la diferencia es 0, 1 ó 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el Jugador 1 anote un punto en una ronda?

8. Usa tu respuesta al Problema 7 para calcular la probabilidad de que el Jugador 2 anotará un punto en una ronda. ¿Tu tabla confirma tu respuesta?

9. *¿Cuál es la diferencia?* es un juego injusto porque un jugador tiene mayor probabilidad de ganar que el otro. Intenta asignar la puntuación de forma diferente para hacer que el juego sea justo.

Comparte & resume

Cuando se lanzan dos dados, los 36 pares posibles son equiprobables. ¿Por qué, entonces, las oportunidades de sacar números cuyo producto sea 25 son diferentes a las oportunidades de sacar números cuyo producto sea 12?

Investigación 3 El juego de "Apodérate del terreno"

En esta investigación, vas a jugar un juego llamado *Apodérate del terreno*. El analizar las probabilidades del juego puede ayudarte con la estrategia de ganar.

MATERIALES
- 2 dados
- marcadores de juegos
- papel cuadriculado

Serie de problemas D

Apodérate del terreno se juega con dos jugadores. El tablero de juego muestra tres terrenos, cada uno dividido en seis secciones enumeradas.

Terreno A		Terreno B		Terreno C	
12	9	30	16	3	10
6	4	25	1	24	15
8	20	36	2	5	18

He aquí las reglas del juego.

- Cada jugador selecciona un terreno.
- Cada jugador lanza un dado; y se multiplican los números de los dos dados.
- Si el producto aparece en una sección del terreno que el jugador haya seleccionado (y todavía no ha sido cubierta), él o ella, coloca un marcador de juegos en esa sección.
- El primer jugador en cubrir todas las secciones en su terreno, gana.

El desafío es seleccionar un terreno con el que tengas la mejor oportunidad de ganar.

1. Juega *Apodérate del terreno* con tu compañero. Para este primer juego, uno de ustedes debe escoger el Terreno B y el otro el Terreno C. Antes de empezar, hagan una predicción sobre quién tiene la mejor oportunidad de ganar.

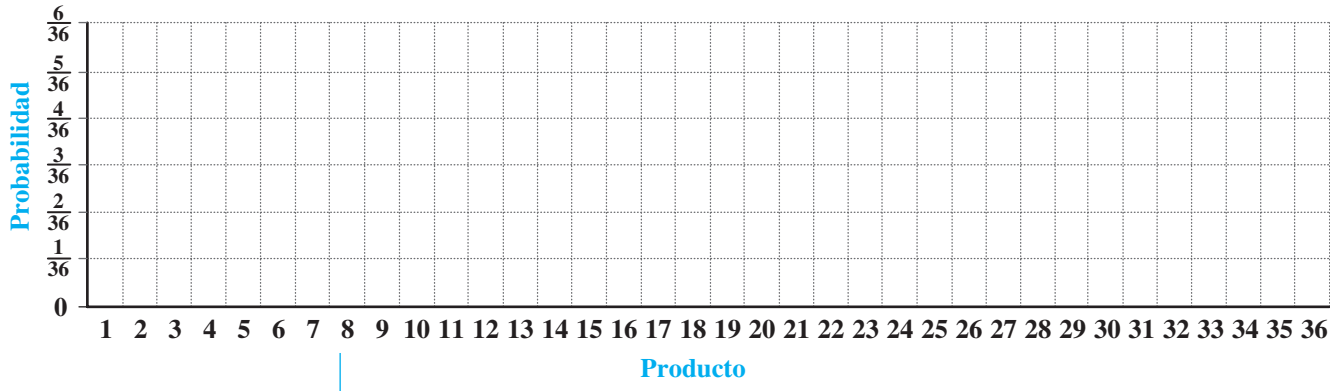
Juega dos o tres veces más con tu compañero. Elige un plano diferente para cada juego de manera que tengas una idea del grado de dificultad o facilidad para ganar con los distintos terrenos.

2. En base a los juegos que jugaste, ¿con cuál terreno te parece que es más fácil ganar? ¿Con cuál te parece más difícil ganar?

Algunas secciones de terreno son más fáciles de cubrir que otras. Por ejemplo, un producto de 25 puede obtenerse solamente de una forma (5 y 5), mientras que un producto de 12 puede obtenerse de cuatro maneras (3 y 4, 4 y 3, 6 y 2 y 2 y 6), así que la sección marcada con el número 12 es más fácil de cubrir que la sección marcada con el 25.

3. Calcula la probabilidad de cubrir cada sección de terreno. Anota sistemáticamente tus resultados.

4. Haz una gráfica de barras para mostrar la distribución de la probabilidad para los productos.



5. Usa tus resultados de los Problemas 3 y 4 para determinar qué terreno (A, B o C) puede ganar el juego más fácilmente. Explica cómo lo decidiste.

Comparte & resume

Puedes enumerar todas las probabilidades para una situación en una tabla, o puedes hacer una gráfica de barras. Comenta algunas de las ventajas de mostrar la distribución de la probabilidad en una gráfica de barras.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Se lanzan dos dados y se suman los dos números que salen.

a. Copia y completa la tabla para mostrar todas las sumas posibles.

		Dado 1					
	+	1	2	3	4	5	6
Dado 2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

b. ¿Cuántas sumas diferentes hay? ¿Cuáles son?

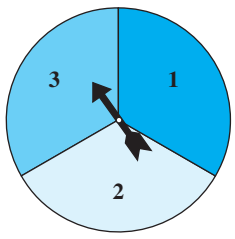
c. ¿Qué suma ocurre con más frecuencia? Enumera todas las formas en que puede crearse.

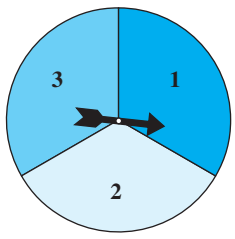
d. Completa la tabla para indicar si la suma de cada combinación de números pares e impares es a su vez par o impar.

		Dado 1	
	+	Par	Impar
Dado 2	Par	par	
	Impar		

e. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados sea impar?

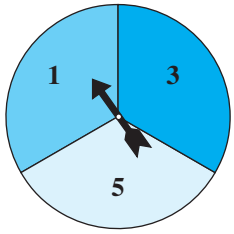
f. Supón que giras estos giradores y sumas los resultados. ¿Puedes utilizar tu tabla de la Parte d para encontrar la probabilidad de que la suma sea impar? Explica.

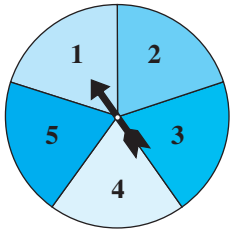




2. Supón que giras estos giradores y multiplicas los resultados.

a. Predice si es más probable un producto impar o un producto par.



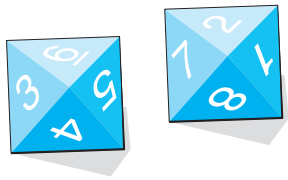


b. Calcula la probabilidad de sacar un producto impar y de uno par. ¿Tus resultados coinciden con tu predicción?

Datos de interés

La forma de un dado de 8 lados se llama *octaedro*. Las 8 caras de un dado octaedro son triángulos equiláteros.

3. Supón que arrojas dos dados de 8 lados con las caras numeradas del 1 al 8.



a. ¿Cuántos posibles pares de números puedes sacar?

b. Completa la tabla para mostrar todas las posibles sumas de los dos dados de ocho lados.

Dado 2 \ Dado 1	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

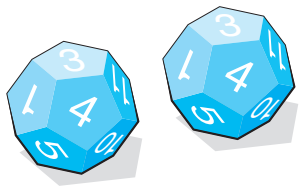
c. ¿Cuál es la probabilidad de que una suma sea impar?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que una suma sea un número primo?

Datos de interés

La forma de un dado de 12 lados se llama *dodecaedro*. Las 12 caras de un dado dodecaedro son pentágonos regulares.

4. Supón que arrojas dos dados de 12 lados con las caras numeradas del 1 al 12.

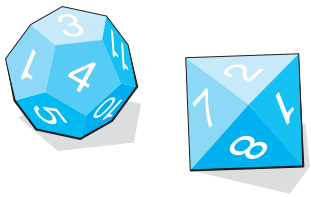


a. ¿Cuántos pares de números posibles puedes sacar?

b. ¿Cuál es la mayor suma posible al arrojar los dos dados de 12 lados?

c. ¿Cuál suma es más probable? ¿Cuál es la probabilidad de sacar esta suma?

5. Supón que arrojas dos dados: un dado de 12 lados con las caras numeradas de 1 al 12, y un dado de ocho lados con las caras numeradas del 1 al 8.



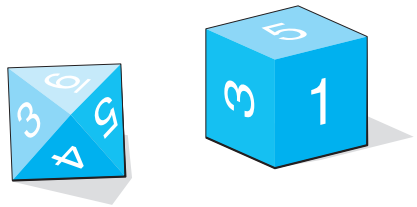
a. ¿Cuántos pares de números posibles puedes sacar?

b. ¿Cuál suma es más probable? ¿Cuál es la probabilidad de esta suma?

c. ¿Es más probable una suma impar o una suma par?

6. Supón que dos personas juegan *¿Cuál es la diferencia?* con un dado de seis lados y con un dado de 8 lados con las caras numeradas del 1 al 8. Los jugadores siguen estas reglas:

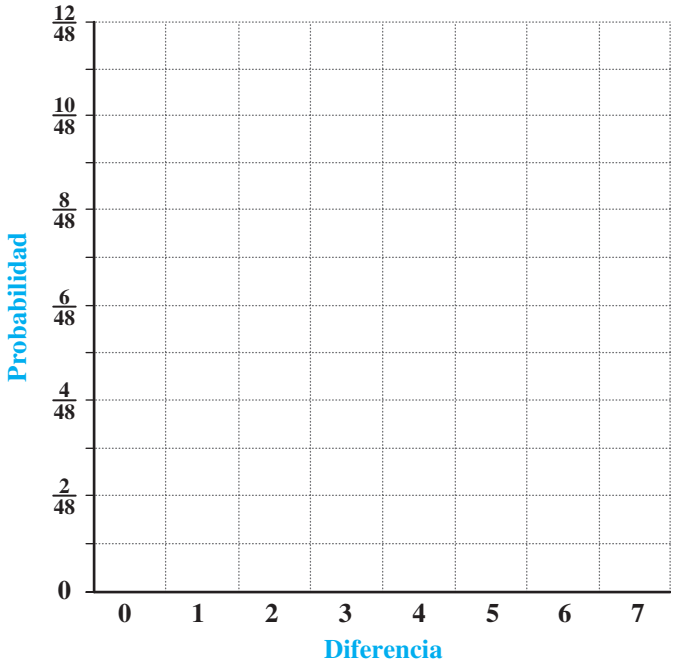
- El Jugador 1 anota 1 punto si la diferencia es 0, 1 ó 2.
- El Jugador 2 anota 1 punto si la diferencia es 3, 4, 5, 6 ó 7.



a. Haz una tabla que muestre la probabilidad de sacar cada diferencia.

b. ¿Es justo este juego? Explica.

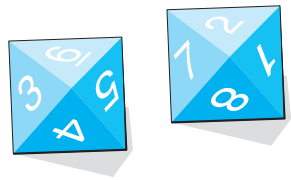
c. Haz una gráfica de barras para mostrar la distribución de la probabilidad para este juego.



d. Compara las reglas de este juego con las reglas del juego *¿Cuál es la diferencia?* original (que utiliza dos dados comunes) como se describió en la Serie de problemas C. ¿En qué juego tiene mejor oportunidad de ganar el Jugador 2? Explica.

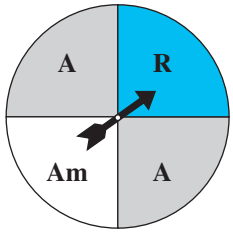
7. Supón que dos personas juegan *¿Cuál es la diferencia?* con dos dados de ocho lados numerados del 1 al 8. Los jugadores siguen estas reglas:

- El Jugador 1 anota 1 punto si la diferencia es 0, 1 ó 2.
- El Jugador 2 anota 1 punto si la diferencia es 3, 4, 5, 6 ó 7.



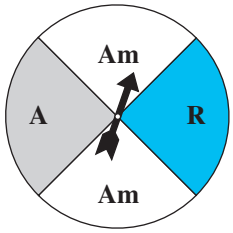
¿Qué jugador tiene la ventaja? Explica tu respuesta.

8. *Mezcla colores* es un juego para dos personas que utiliza los giradores y las tarjetas que aparecen abajo.



Tarjeta 1	
Am	A
A	Am

Tarjeta 2	
R	M
An	A



Tarjeta 3	
Am	V
M	An

Tarjeta 4	
R	Am
A	V

Las letras en los tableros de los giradores y en las tarjetas representan los colores rojo, azul, amarillo, verde, anaranjado y morado. A continuación están las reglas.

- Cada jugador selecciona una tarjeta diferente.
- Cada jugador gira un girador. Los colores en los dos tableros están "mezclados" para dar una mezcla de color, como sigue:

  RR = R AA = A AmAm = Am RAm = An RA = M
  AAm = V

- Si la mezcla de colores aparece en la tarjeta de un jugador (y no está cubierta todavía) él o ella pone una marca en esa sección.
- El primer jugador que cubra todas las secciones en su tarjeta gana el juego.

CONTENTS

a. Haz una predicción acerca de qué tarjeta tiene la mejor oportunidad de ganar el juego.

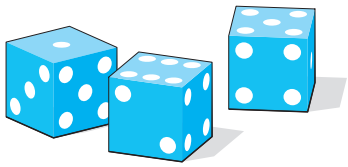
b. Calcula la probabilidad de sacar cada color mezclado. Anota tus resultados de forma sistemática.

c. Haz una gráfica de barras para mostrar la probabilidad de sacar cada color mezclado.

d. Usa tus resultados de las Partes b y c para determinar qué tarjeta tiene la mejor oportunidad de ganar. Explica cómo lo decidiste.

Conecta & amplía

9. Imagina que lanzas tres dados normales y multiplicas los tres números.

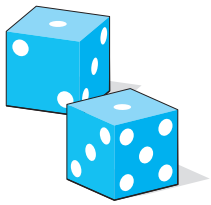


a. ¿Cuántos números triples son posibles cuando lanzas tres dados?

b. *Sin* calcular los productos de cada lanzamiento posible, describe una forma en que podrías determinar si es que un producto impar o un producto par es más probable.

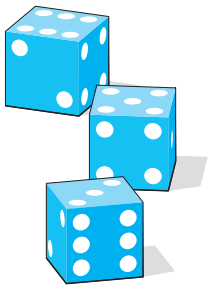
c. Usa tu método de la Parte b para determinar si es que un producto par o un producto impar es más probable.

10. Imagina que lanzas cinco dados normales y buscas resultados cuando coinciden los cinco dados.



a. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles al tirar cinco dados? Explica.

b. ¿En cuántos de los resultados posibles coinciden los cinco dados?



c. ¿Cuál es la probabilidad de que los cinco dados coincidan en un solo lanzamiento?

d. Supón que Tamika tiene tres tiros para hacer que los cinco dados coincidan. En el segundo y tercer tiros, ella puede arrojar algunos o todos los cinco dados de nuevo.

En su primer lanzamiento, Tamika saca tres 3, un 2 y un 6. Ella recoge los dados que muestran 2 y 6 y los lanza de nuevo. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga dos 3 más en este lanzamiento?

11. Dos jugadores lanzan un dado de seis lados cada uno y calculan la diferencia entre los números.

- El Jugador 2 recibe 2 puntos cada vez que la diferencia es 3, 4 ó 5.
- El Jugador 1 recibe 1 punto cada vez que la diferencia es 0, 1 ó 2.

¿Cuál jugador tiene la ventaja en este juego? Explica tu respuesta.

12. Kai quiere crear un juego de dados para dos personas que sea justo y utilice la divisibilidad entre 3. Él decidió estas reglas:

- Cada jugador lanza un dado.
- Los jugadores calculan la suma de los dos números.
- El Jugador 1 anota si la suma es divisible entre 3. El Jugador 2 anota si la suma *no* es divisible entre 3.

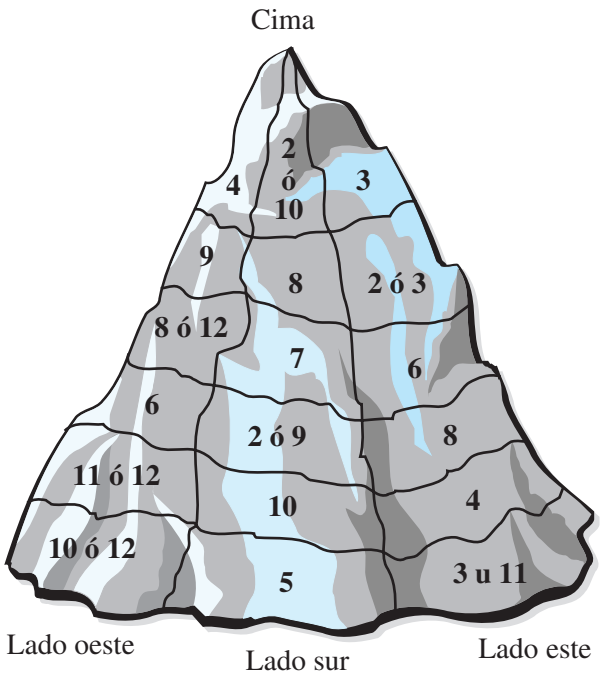
Kai no está seguro sobre cuántos puntos deben anotarse los jugadores cada vez.

a. Haz una tabla para mostrar la probabilidad de sacar cada suma.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el Jugador 1 anote en cierto lanzamiento?

c. Kai decidió dar 2 puntos al Jugador 2 cuando la suma no es divisible entre 3. Para que el juego sea justo, ¿cuántos puntos debe anotar el Jugador 1 cada vez que la suma *sea* divisible entre 3?

13. *Escala la montaña* es un juego para dos personas que utiliza dos dados y este tablero.



En tus propias palabras

Si tuvieras que decidir si jugar un juego de azar, ¿qué podrías calcular para decidir si el juego es justo?

He aquí las reglas para *Escala la montaña.*

- Cada jugador selecciona un lado diferente de la montaña para escalar paso a paso.
- Cada jugador lanza un dado y se suman los resultados.
- Si la suma aparece como el siguiente paso en el lado de la montaña que escogió el jugador, él o ella ponen una marca en ese paso. Los jugadores deben proceder un paso cada vez desde la base hasta la cima.
- El primer jugador en llegar a la cima gana.

El desafío es escoger el lado de la montaña que da la mejor oportunidad de ganar.

a. Copia y completa estas tablas, que muestran la probabilidad para alcanzar cada paso a lo largo de cada lado del tablero de *Escala la montaña.*

Lado oeste

Paso	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	4/36					

Lado sur

Paso	1	2	3	4	5	6
Probabilidad						

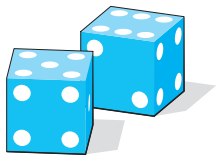
Lado este

Paso	1	2	3	4	5	6
Probabilidad						

b. ¿Cuál de los lados tiene la mayor probabilidad de ganar?

c. ¿Cuál de los lados tiene la menor probabilidad de ganar?

14. En la Investigación 3, jugaste el juego *Apodérate del terreno.* Diseña un nuevo terreno de seis lotes con el que sea más fácil ganar que con los Terrenos A, B o C. Explica tu razonamiento.



15. *Dados ocultos* es un juego para dos personas en el cual los contrincantes se turnan para adivinar uno o ambos números en un par de dados.

Los jugadores se turnan para lanzar los dados y ocultar el resultado. El jugador que lanza los dados anuncia que la suma es "mayor o igual a 7" o "menor o igual a 7".

Si el jugador que tiene que adivinar puede identificar correctamente uno de los dados, él o ella anota 1 punto. El jugador que adivina puede entonces mantener el punto o cederlo por una oportunidad de adivinar el segundo dado. El ganador es el primer jugador que anote 10 puntos o que adivine ambos dados correctamente en el mismo turno.

a. Completa la tabla que muestra todas las maneras posibles en que puedes sacar una suma que sea mayor o igual a 7.

Suma	Dado 1	Dado 2
12	6	6
11	5	6
	6	5
10	5	5
	4	6
	6	4
9		

Suma	Dado 1	Dado 2
8		
7		

b. Haz otra tabla que muestre todas las maneras posibles en que puedes sacar una suma que sea igual o menor a 7.

c. Considera los resultados posibles para una suma que sea mayor o igual a 7. ¿Qué número aparece en el mayor número de resultados? Da la probabilidad de que *ese* número aparezca en por lo menos uno de los dados cuando el jugador que lanza informa que la suma es "mayor o igual a 7".

d. Considera los resultados posibles para una suma que sea menor o igual a 7. ¿Cuál número aparece en el mayor número de resultados? Da la probabilidad de que *ese* número aparezca en por lo menos uno de los dados cuando el jugador que lanza informa que la suma es "menor o igual a 7".

e. Supón que el jugador que lanza anuncia que la suma es mayor o igual a 7, y tú adivinas correctamente que un 2 aparece en uno de los dados. ¿Cuántas posibilidades hay para el otro dado y cuáles son?

f. Supón que el jugador que lanza anuncia que la suma es mayor o igual a 7, y tú adivinas correctamente que un 1 aparece en uno de los dados. Explica por qué debes continuar y ceder tu punto para adivinar lo que aparece en el otro dado.

g. ¿Cuál es la desventaja de adivinar 1 en tu primer intento cuando la suma es mayor o igual a 7?

h. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de adivinar 6 en tu primer intento cuando la suma es mayor o igual a 7?

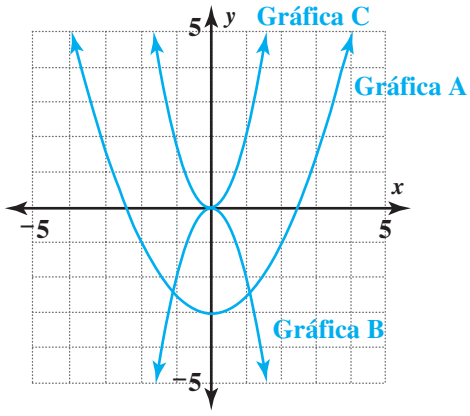
Repaso mixto

16. Relaciona cada ecuación. con una gráfica.

a. $y = {}^{-}2x^2$

b. $\frac{y}{2} = x^2$

c. $y + 3 = 0.5x^2$



17. Escribe una ecuación para representar el valor de K en términos de n.

n	0	1	2	3	4
K	1	0.4	0.16	0.064	0.0256

18. Ordena estos números de menor a mayor.

$$\sqrt[9]{-4} \qquad \sqrt[3]{-4} \qquad \sqrt[11]{-4} \qquad \sqrt[5]{-4} \qquad \sqrt[7]{-4}$$

19. Dibuja una gráfica para estimar la solución de este sistema de ecuaciones. Revisa tu respuesta por sustitución.

$$y = 2x + 7$$

$$4x + 3y = 31$$

20. Un segmento de recta con una longitud de 8 y pendiente de $\frac{1}{4}$ cambia de escala por un factor de 3. ¿Cuál es la longitud y la pendiente del nuevo segmento?

Desarrolla y reduce cada expresión.

21. ${}^{-}3a(2a - 3)$

22. $(4k - 7)({}^{-}2k + 3)$

Reduce cada expresión.

23. $\frac{m - 3}{m(2m - 6)}$

24. $\frac{7}{k - 2} - \frac{5}{2(k - 2)}$

9.3 Investigaciones con probabilidad

Muchas personas juegan sorteos de lotería estatales. Hay una importante cuestión social relacionada con estos juegos: ¡generalmente parecen ser más fáciles de ganar de lo que realmente son! Si los jugadores supieran sus oportunidades reales de ganar, podrían tomar mejores decisiones acerca de si jugar o no y con qué frecuencia.

Piensa & comenta

En un sorteo de lotería, los participantes escogen seis números diferentes del 1 al 49. Para ganar el premio mayor, todos los seis números deben coincidir con los que se seleccionan en una rifa al azar. El orden de los números no importa. Por ejemplo, 3-32-16-13-48-41 se considera igual que 3-13-16-32-41-48.

Este juego tiene sorteos dos veces a la semana. Supón que seleccionaste un grupo de seis números para cada sorteo. Haz una suposición acerca de qué tan seguido podrías esperar ganar el premio mayor.

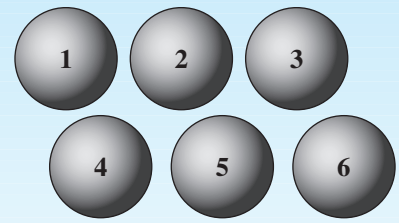
Al terminar esta lección, serás capaz de encontrar la respuesta exacta a este problema.

Investigación 1 Analiza sorteos de lotería

Comencemos por analizar algunos sorteos de lotería simples. Considera un sorteo en el cual debes igualar dos números de un total de seis.

Piensa & comenta

Para ganar el juego de lotería *2 de 6,* debes relacionar dos números diferentes, del 1 al 6, con los que se seleccionan en una rifa al azar. ¿Con qué frecuencia crees que podrías ganar este juego? Responde esta pregunta completando este enunciado de probabilidad:



Yo estimo que podría ganar el juego 2 de 6 una vez cada _____ juegos.

Anota las respuestas de todo tu grupo en el pizarrón.

CONTENTS

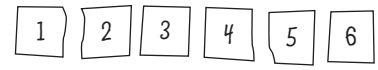
MATERIALES

- 6 tiras de papel idénticas
- un recipiente

Serie de problemas A

Con un compañero, sigue estos pasos para modelar el juego de lotería *2 de 6.*

- Escribe los números enteros del 1 al 6 en tiras separadas de papel. Coloca las tiras en un recipiente y mézclalas.



- Un compañero debe anotar su elección de dos números de lotería.
- El otro compañero debe seleccionar dos números del recipiente.
- Anota "gana" si el par de números seleccionados coincide con el par de números anotados y "pierde" si no coincide. (Ambos números deben coincidir para que puedas ganar.)
- Devuelve los números al recipiente, y mézclalo de nuevo.
- Mantén los mismos números de lotería elegidos, repite el proceso (selecciona dos números del recipiente, anota "gana" o "pierde" y devuélvelos al recipiente) hasta que hayas hecho 10 selecciones.

1. ¿Cuántas veces de las 10 ganaste el juego?

2. Combina tus resultados con los de tus compañeros. Usa los resultados combinados para completar este enunciado:

En nuestro experimento en clase, hubo 1 ganador por cada ____ juegos.

3. Enumera todos los posibles pares que pueden sacarse en el juego de lotería de *2 de 6.* Recuerda, el orden de los números no importa; por ejemplo, 3-4 es lo mismo que 4-3. ¿Cuántos pares hay?

4. En lugar de enumerar todas las posibilidades, puedes usar un atajo para encontrar el número de pares.

a. ¿Cuántas maneras hay de seleccionar el primer número?

b. Una vez que se selecciona el primer número, ¿cuántas formas hay para seleccionar el segundo número?

c. Si multiplicas tus respuestas de las Partes a y b, tendrás el número de pares si el orden *importara.* Para ver que esto es verdad, dibuja un diagrama de árbol que muestre las diferentes combinaciones. ¿Cuántos pares diferentes habría si el orden importara?

d. Explica por qué puedes simplemente multiplicar las respuestas de las Partes a y b para encontrar el número de pares.

e. Cualquier par de números puede acomodarse de dos maneras; por ejemplo, 1-2 y 2-1. Entonces, tu total de la Parte c cuenta cada par de números dos veces. Para encontrar el número verdadero de pares, necesitas dividir tu resultado de la Parte c entre 2.

¿Cuál es el número total de pares posibles para el juego de lotería *2 de 6*? ¿En qué se diferencia este número con el número de pares posibles en la lista que hiciste en el Problema 3?

Un arreglo o lista de objetos en que el orden *no* es importante se llama *combinación.*

5. Si escoges sólo un par en el juego de lotería *2 de 6,* ¿cuáles son tus probabilidades de ganar? Anota tu respuesta al completar este enunciado de probabilidad:

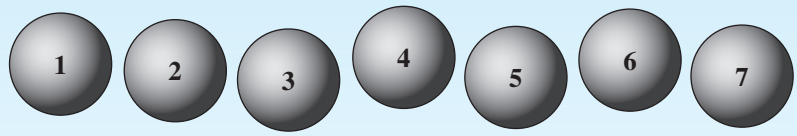
Las oportunidades de ganar son de 1 en ____.

6. Compara tu respuesta al Problema 5 a las predicciones que hizo tu grupo en Piensa & comenta al final de la página 582. ¿Los datos apoyan la idea de que el juego parece más fácil de lo que realmente es?

Como probablemente ya adivinaste, las oportunidades de ganar un sorteo de lotería cambian al cambiar el número de opciones y el número de combinaciones que se requieren para ganar.

Piensa & comenta

En el sorteo de lotería *3 de 7,* los jugadores deben hacer coincidir tres números diferentes del 1 al 7 con los que se seleccionan en una rifa al azar. Entonces, los jugadores tienen un número más para escoger, y deben hacer coincidir tres números en lugar de dos.



Piensa acerca de cómo estos cambios afectarían tus oportunidades de ganar. Entonces completa este enunciado:

Yo estimo que podría ganar el juego de 3 de 7 una vez cada ____ *juegos.*

Anota las respuestas de todo el grupo en el pizarrón.

CONTENTS

Serie de problemas B

1. Puedes usar la estrategia para contar de la Serie de problemas A para calcular el número de triples posibles para el juego *3 de 7*.

a. ¿Cuántas posibilidades hay para el primer número seleccionado?

b. Una vez que se elige el primer número, ¿cuántas posibilidades tiene el segundo número?

c. Una vez que se eligieron los primeros dos números, ¿cuántas posibilidades tiene el tercer número?

d. Al multiplicar tus resultados de las Partes a, b y c obtendrás el número de triples si el orden *importara*, por ejemplo, si 1-2-3 se considerara diferente que 2-3-1. ¿Cuántos triples diferentes habría si el orden importara?

En tu respuesta a la Parte d, cada triple se incluye más de una vez. Para encontrar cuántas veces se cuenta cada triple, piensa en cuántas maneras pueden acomodarse los números triples. Por ejemplo, considera los números 1, 2 y 3.

e. ¿Cuántas posibilidades hay para el primer número?

f. Una vez que se selecciona el primer número, ¿cuántas posibilidades hay para el segundo número?

g. Una vez que se eligieron los primeros dos números, ¿cuántas posibilidades tiene el tercer número?

h. ¿Cuántas veces se cuenta cada triple en tu respuesta a la Parte d? Es decir, ¿cuántas maneras hay para arreglar tres números?

i. Para encontrar el número verdadero de triples, divide tu resultado de la Parte d entre tu respuesta a la Parte h. ¿Cuál es el número total de posibles triples en el juego de lotería *3 de 7*?

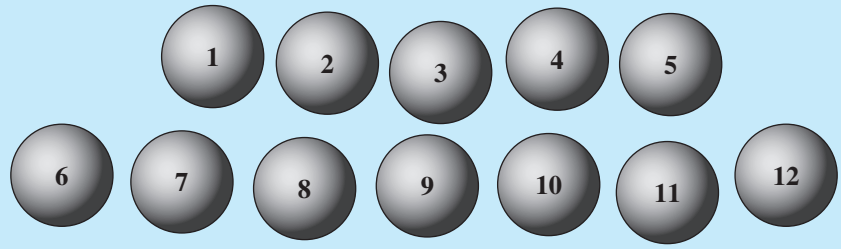
2. ¿Cuáles son tus probabilidades de ganar el juego de *3 de 7*?

3. Compara tu respuesta al Problema 2 con las predicciones que hizo tu grupo en Piensa & comenta en la página 584. ¿El juego parece más fácil de lo que realmente es?

Puedes usar las técnicas que desarrollaste en las Series de problemas A y B para calcular la probabilidad de ganar otros juegos de lotería.

EJEMPLO

Calcula la probabilidad de ganar el juego *4 de 12*. Para hacer esto, necesitas encontrar el número de maneras posibles en que puedes seleccionar 4 números de un total de 12.



Primero piensa en el número de posibilidades si el orden importara. Habría 12 posibilidades para el primer número, 11 para el segundo, 10 para el tercero y 9 para el cuarto. Entonces, si el orden importara, el número de posibilidades sería $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ u 11,880.

Cualquier grupo de cuatro números puede acomodarse en $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ó 24, formas. Entonces, el producto de $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ cuenta cada grupo de seis números 24 veces. Para encontrar el número de selecciones posibles de lotería, debes dividir el resultado entre 24:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11{,}880}{24} = 495$$

Entonces, hay 495 formas en que puedes seleccionar cuatro números. La probabilidad de ganar el juego con un sólo boleto es de $\frac{1}{495}$.

Comparte & resume

1. Calcula la probabilidad de ganar el juego de lotería descrito en Piensa & comenta al principio de la página 582. Recuerda, este es un juego de *6 de 49*. Muestra tus cálculos.

2. Si seleccionas un grupo de seis números para ambos sorteos cada semana, ¿con qué frecuencia podrías ganar? Muestra tus cálculos.

Investigación 2 Analiza eliminatorias deportivas

Muchas ligas deportivas terminan su temporada con algún tipo de eliminatoria. Los organizadores de los partidos eliminatorios deben decidir cuántos equipos incluir y cómo estructurar las series de juegos. Los organizadores intentan hacer la estructura lo más justa posible para todos los equipos.

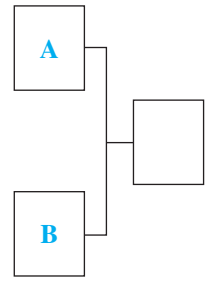
MATERIALES

- diagramas de eliminatoria para 3 equipos
- 3 tiras idénticas de papel
- 2 dados

Serie de problemas C

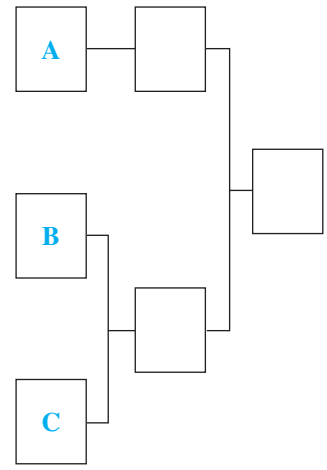
Ahora analizarás dos estructuras para las eliminatorias, *Primeros dos* y *Primeros tres*.

Primeros dos: Los Equipos A y B tienen el mejor récord al final de la temporada. Los dos equipos juegan y el ganador se declara como campeón.



1. Suponte que los equipos tienen las mismas oportunidades de ganar el juego. ¿Cuál es la probabilidad de que el Equipo A gane el campeonato? ¿Cuál es la probabilidad de que gane el Equipo B?

Primeros tres: Al final de la temporada, los Equipos A, B y C tienen las tres mejores puntuaciones. En los juegos eliminatorios, el Equipo B juega contra el Equipo C y el ganador juega contra el equipo A para ganar el campeonato.



Puedes trabajar en un grupo de tres para modelar la serie de *Primeros tres.* En tu modelo, presume que cada equipo tiene las mismas oportunidades de ganar cada juego.

Para decidir quién representará a cada equipo, escribe A, B y C en tres tiras idénticas de papel. Ponlas boca abajo, mézclalas y cada jugador escoge una.

En una copia del diagrama que aparece arriba, pon las tiras de papel en las posiciones iniciales. Para cada juego, cada uno de los dos alumnos que representan a los equipos lanza un dado. El alumno que tire el número más alto gana el juego y mueve su tira de papel a la siguiente ronda. Si hay un empate, los alumnos lanzan los dados de nuevo.

2. Juega la serie de partidos eliminatorios ocho veces, llevando la cuenta de los equipos campeones.

Equipo	Número de campeonatos
A	
B	
C	

3. ¿Qué equipo ganó más campeonatos? ¿Por qué crees que esto es así?

4. Si supones que los equipos tienen iguales posibilidades de ganar cada partido, puedes encontrar la probabilidad de que cada equipo gane el campeonato.

a. Si estos juegos eliminatorios se jugaran ocho veces, ¿cuántas veces esperarías que el Equipo B le ganara al Equipo C en el primer partido?

b. Del número de veces en que el Equipo B le gana al Equipo C, ¿cuántas veces esperarías que le ganara también al Equipo A en el juego final?

c. Usa tus resultados para determinar la probabilidad de que el Equipo B gane el campeonato.

d. Usa un método similar para determinar las probabilidades de que el Equipo A y el Equipo C ganen el campeonato. Es decir, imagina que la serie se juega ocho veces y calcula cuántas veces puedes esperar que cada equipo gane el campeonato.

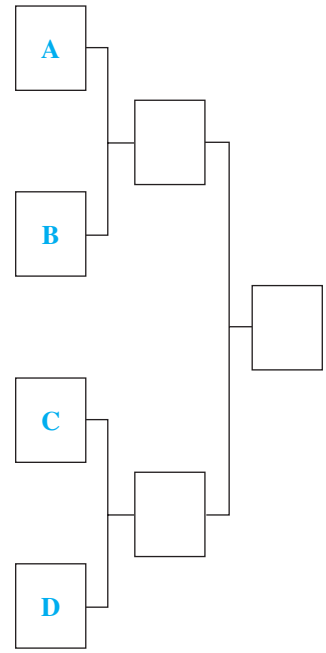
5. Supón que una liga deportiva con varios equipos planifica una eliminatoria especial. Los organizadores están considerando incluir los primeros dos equipos (usando la estructura de *Primeros dos*) o los primeros tres equipos (usando la estructura de *Primeros tres*). Comenta sobre si crees que una estructura de eliminatorias sería más apropiada que otra.

A continuación, compararás estructuras para juegos eliminatorios que incluyen a cuatro equipos.

MATERIALES
- diagramas de eliminatoria para 4 equipos
- 4 tiras idénticas de papel
- 2 dados

Serie de problemas D

Al final de la temporada, los Equipos A, B, C y D son los cuatro mejores equipos. Aquí tienes una posible estructura para los juegos eliminatorios.

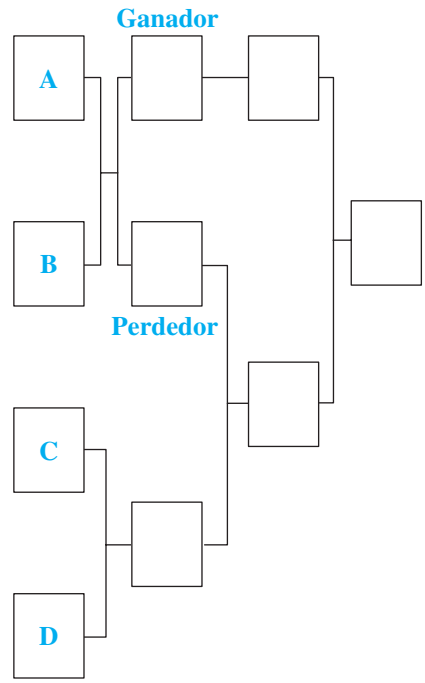


1. Trabaja en un grupo de cuatro, juega la serie completa de juegos eliminatorios cinco veces, anotando un registro de los equipos campeones.

2. Combina tus resultados con los de los otros grupos. Resume lo que halles.

CONTENTS

Aquí tienes otra forma de estructurar los juegos eliminatorios para cuatro equipos.



3. Trabaja con tu grupo para modelar esta serie. Juega la serie completa cinco veces, llevando la cuenta de tus resultados.
4. Combina tus resultados con los de otros grupos. Resume lo que halles.
5. Discute las circunstancias bajo las cuales piensas que una estructura de juegos eliminatorios sería más apropiada que otra.
6. **Reto** Para cada estructura en esta serie de problemas, calcula la probabilidad de que cada equipo gane el campeonato. Suponte que ambos equipos tienen posibilidades iguales de ganar cada partido. (Ayuda: Imagina que la serie se juega ocho veces y determina cuántas veces puedes esperar que cada equipo gane el campeonato.)

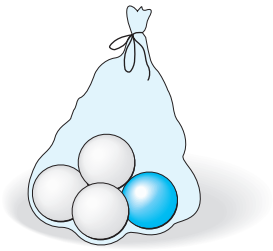
Comparte & resume

En algunas de las estructuras para juegos eliminatorios que examinaste, todos los equipos tenían la misma oportunidad de ganar el campeonato. En otras, por lo menos un equipo tuvo una mejor oportunidad que alguno de los otros equipos. ¿Cuál es la diferencia en las estructuras que permite que un equipo tenga una mejor oportunidad de ganar?

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

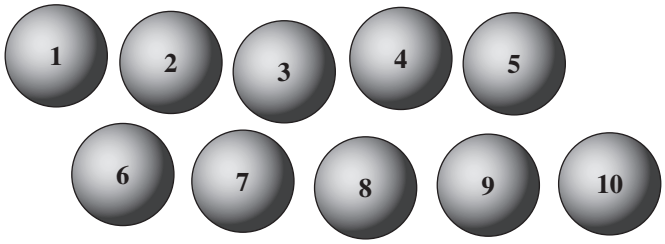
1. En el juego *Anaranjado y blanco,* se colocan tres canicas blancas y una anaranjada dentro de una bolsa. Un jugador saca al azar dos canicas. Si las canicas son de diferentes colores, el jugador gana un premio.



a. Enumera todos los pares posibles en el espacio muestral. (Ayuda: Marca las canicas B1, B2, B3 y An.)

b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar un premio?

2. Para ganar el juego de lotería *3 de 10,* los jugadores deben hacer coincidir tres números del 1 al 10 que se seleccionan en un sorteo al azar. Recuerda que el orden no importa.



a. ¿Cuántos triples son posibles en el juego de lotería *3 de 10*?

b. ¿Cuáles son tus oportunidades de ganar el juego de lotería *3 de 10*?

3. Para ganar el premio mayor en el juego de lotería *Combina 5,* los jugadores deben hacer coincidir cinco números del 1 al 30 con los que se seleccionan en una rifa al azar. Recuerda, el orden no importa.

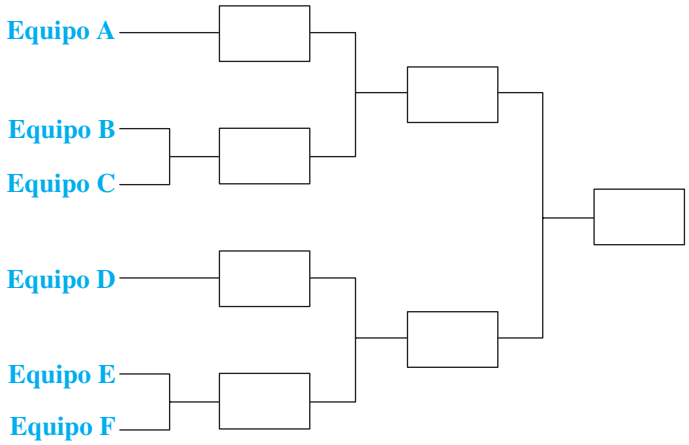
a. ¿Cuántos grupos diferentes de cinco números son posibles?

b. Si compraste un solo boleto con cinco números, ¿cuál es la probabilidad de que ganes el premio mayor?

c. El juego de lotería *Combina 5* tiene tres rifas a la semana. Si compraste un boleto para cada rifa (es decir, si jugaste tres veces a la semana) ¿con qué frecuencia podrías ganar el premio mayor?

d. Supón que compraste 100 boletos para cada rifa (con un grupo diferente de cinco números en cada boleto). ¿Con qué frecuencia podrías ganar el premio mayor?

4. Deportes Una liga de voleibol tiene dos divisiones. Al final de la temporada, el Equipo A está en primer lugar en la División 1, seguido por el Equipo B y el Equipo C. El Equipo D está en primer lugar en la División 2, seguido por el Equipo E y el Equipo F. Los organizadores de la liga estructuraron los juegos eliminatorios como se muestra a continuación.



a. Modela esta serie seis veces, lleva la cuenta de los equipos campeones. Lanza una moneda o un dado para determinar el ganador de cada juego.

b. ¿Cuál equipo ganó más campeonatos?

c. Calcula la probabilidad de que cada equipo gane el campeonato. Presume que ambos equipos en cada partido tienen las mismas posibilidades de ganar. (Ayuda: Imagina que juegas una serie ocho veces y determina cuántas veces puedes esperar que cada equipo gane el campeonato.)

5. Diseña una estructura de campeonato para seis equipos en la que todos los equipos jueguen la primera ronda. Presume que cada equipo tiene iguales posibilidades de ganar un solo juego, calcula la probabilidad de que cada equipo gane el campeonato.

Conecta & amplía

6. Las matrículas para automóviles en un estado consisten en tres letras diferentes seguidas por tres dígitos diferentes. El estado no usa vocales ni la letra *Y*, lo cual previene que accidentalmente se formen palabras de jerga en las matrículas.

a. Cada letra puede aparecer solamente una vez en una cierta matrícula. ¿Cuántos diferentes conjuntos de tres letras son posibles?

b. Cada dígito puede aparecer solamente una vez en una cierta matrícula. ¿Cuántos diferentes conjuntos de tres dígitos son posibles?

c. En total, ¿cuántas matrículas con tres letras seguidas por tres dígitos son posibles en este estado?

7. Supongamos que el juego de lotería *2 de 6* se modificó de modo que después de seleccionar el primer número, ese número se devuelve al grupo antes de seleccionar el próximo número. De esta manera, se puede repetir cualquier número, lo que quiere decir que sería posible sacar pares como 2-2 y 3-3.

a. ¿Serían mejores o peores tus oportunidades de ganar en este juego modificado? Explica.

b. Enumera todos los pares posibles para este juego modificado, presume que el orden *sí* importa. Explica.

c. Enumera todos los posibles pares de la parte b.

d. Puesto que el orden en realidad no importa en este juego, ¿cuántos pares *diferentes* hay? (Recuerda, si el orden no importa, 1-2 es igual que 2-1.)

e. ¿Son equiprobables todos los pares en la parte d? Explica.

f. Si escoges un par de números para este juego modificado, ¿qué probabilidad tienes de ganar? (Ayuda: Hay dos casos a considerar.)

8. Supongamos que se modificó el juego de lotería *3 de 7,* de modo que después de seleccionar cada número, éste se regresa al grupo antes de se seleccionar el siguiente número. De esta forma, se puede repetir un número, es decir, triples como 1-2-2 y 3-3-3 son posibles.

a. ¿Cuántos pares posibles hay para este juego modificado, si presumes que el orden *sí* importa? Explica tu respuesta.

b. Como en realidad el orden no importa en este juego, 1-1-2, 1-2-1 y 2-1-1 son todos el mismo triple. De modo que hay 84 *diferentes* triples posibles. ¿Son equiprobables todos estos triples diferentes? Explica.

c. Si eliges un número triple para este juego modificado, ¿qué probabilidad tienes de ganar? (Ayuda: Hay tres casos a considerar.)

En tus propias palabras

Describe qué harías para que cierto juego de lotería fuera más difícil de ganar.

CONTENTS

9. Reto En el juego de lotería *4 de 7,* los jugadores deben hacer coincidir cuatro números del 1 al 7 con los que se seleccionan en un sorteo al azar.

a. Si seleccionas un grupo de cuatro números, ¿cuál es la probabilidad de que ganes este juego?

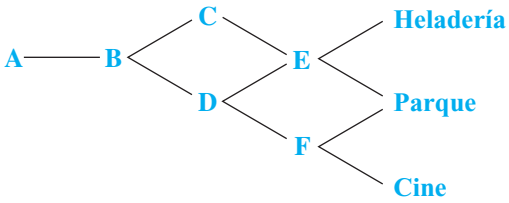
b. ¿En qué se diferencian la probabilidad de ganar el juego de lotería *4 de 7* y la probabilidad de ganar el juego de lotería *3 de 7* (ve tu trabajo en la Serie de problemas B)?

c. Calcula y compara las posibilidades de ganar el juego de lotería *5 de 7* (donde debes escoger cinco números del 1 al 7) y el juego de lotería *2 de 7* (donde debes escoger dos números del 1 al 7).

d. Vuelve al Ejemplo en la página 586. Usa cálculos similares para explicar lo que descubriste en las Partes b y c.

e. ¿Qué juego tiene la misma probabilidad de ganar que el juego *4 de 6*? Explica.

10. El Sr. Wegman sale a manejar todas las tardes de domingo. Un domingo, decide dejar que la probabilidad determine su destino. El diagrama muestra la red de caminos por la que conduce. Empieza en el Punto A y se dirige al Punto B. Cada vez que llega a una intersección en el camino, lanza una moneda al aire para decidir qué camino tomar. Si sale cara, va a la izquierda. Si sale escudo, va a la derecha.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que el Sr. Wegman termine en el cine? (Ayuda: Imagina que toma este paseo ocho veces. ¿Cuántas veces esperarías que termine en el cine?)

b. ¿Cuál es la probabilidad de que termine en el parque?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que termine en la heladería?

11. Deportes En cierta liga deportiva, cinco equipos califican para los juegos eliminatorios finales.

a. Diseña dos formas de estructurar la serie de eliminatorias.

b. Describe una situación en la que una de las estructuras para la eliminatoria sería más apropiada que otra.

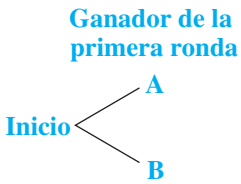
12. Reto En la Investigación 2, siempre presumiste que los dos equipos tienen las mismas oportunidades de ganar un solo juego. Para este ejercicio, suponte que el Equipo A tiene una oportunidad del 60% de vencer al Equipo B en cada uno de los juegos en que se enfrentan.

a. Supón que hay un torneo de un solo partido entre los equipos y que el ganador del juego gana el torneo. ¿Cuál es la probabilidad de que el Equipo A gane? ¿Y de que el Equipo B gane?

Ahora supón que tienes un torneo de "los mejores dos de tres". Eso significa que los equipos juegan hasta que uno de ellos gana dos partidos.

b. Usa un diagrama de árbol para mostrar todas las posibilidades en el torneo. Por ejemplo, en el primer juego, hay dos ramas:

A gana o B gana. (Ayuda: Si A gana los primeros dos juegos, ¿se juega el tercero?)



c. Supón que los equipos jugaron 1,000 torneos. ¿En cuántos torneos esperarías que el Equipo A gane el primer partido? ¿En cuántos de esos torneos esperarías que el Equipo A también gane el segundo partido?

d. Para cada combinación en tu diagrama de árbol, usa un razonamiento similar para encontrar el número de torneos del total de 1,000 que esperarías tuvieran ese resultado. Por ejemplo, una combinación sería ABB; ¿en cuántos torneos de un total de 1,000 esperarías que el ganador fuera A, luego B y después B? (Ayuda: Revisa tus respuestas sumándolas; debe ser un total de 1,000.)

e. Encuentra el número total de torneos de un total de 1,000 en los cuales cada equipo gane el torneo. ¿Cuál es la probabilidad de que el Equipo A gane el torneo?

f. ¿Qué torneo, un *sólo juego* o los *mejores dos de tres,* es mejor para el Equipo B?

Repaso mixto

13. Considera la recta $y = {}^{-}5x - 7$.

a. Una segunda recta es paralela a la anterior. ¿Qué es lo que sabes acerca de la ecuación de la segunda recta?

b. Escribe una ecuación para la recta paralela a $y = {}^{-}5x - 7$ que pase por el origen.

c. Escribe una ecuación para la recta paralela a $y = {}^{-}5x - 7$ que cruce el eje y en el punto $(0, {}^{-}2)$.

d. Escribe una ecuación para la recta paralela a $y = {}^{-}5x - 7$ que pase por el punto $(3, 0)$.

14. Ciencia biológica Los datos en la tabla representan cómo crece cierta población de bacterias con el tiempo. Escribe una ecuación para la relación, suponiendo que el crecimiento es exponencial.

Horas desde el inicio, h	Población, p
0	1
1	5
2	25
3	125

15. Copia esta figura. Crea un diseño con simetría de rotación girando la figura varias veces alrededor del punto y usando un ángulo de rotación de 30°.

16. Resuelve la desigualdad $0 > 5(7 - x) + 12x$. Dibuja una gráfica de la solución.

Factoriza cada expresión.

17. $4h^2 - 2h$

18. ${}^{-}6a^2 + ab + b^2$

19. ${}^{-}4k^2 - 5kj - j^2$

20. $2m^2 - 9 + 3m$

Usa la fórmula cuadrática para resolver cada ecuación.

21. $3h^2 - 2h + {}^{-}6 = 0$

22. ${}^{-}6a^2 + 3a = {}^{-}4$

23. $4k^2 = 5k + 2$

24. $2m^2 - 12 = 6m$

Encuentra las intersecciones x para la gráfica de cada ecuación.

25. $(x - 5)^2 - 49 = 0$

26. $6x^2 + 36 - 30x = 0$

Capítulo 9 Repaso autoevaluación

Resumen del capítulo

VOCABULARIO
espacio muestral

En este capítulo, encontraste el tamaño de los *espacios muestrales* para varias situaciones. Algunas veces esto requirió que contaras todas las maneras posibles en que un grupo de elementos podría seleccionarse de un grupo más grande. Otras veces tuviste que calcular el número de formas en que podía ordenarse un grupo de cosas.

Puedes encontrar el espacio muestral para una situación al hacer una lista sistemática de todas las posibilidades. Aprendiste que algunas veces puedes descubrir un patrón para ayudarte a determinar el tamaño del espacio muestral sin tener que enumerar todos los resultados.

También encontraste las probabilidades de eventos para varias situaciones y determinaste si un evento era más probable que otro. Observaste que a veces encontrar probabilidades puede ayudarte a tomar decisiones o idear estrategias para ganar juegos.

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas en esta sección te ayudarán a revisar y aplicar las ideas y estrategias importantes que desarrollaste en este capítulo.

Hacer una lista sistemática de cada resultado posible

1. Ally, Brevin, Carol, Doug y Evan están preparando un torneo de ajedrez entre ellos que será un torneo de rondas individuales, es decir, cada participante se enfrentará con cada uno de los demás participantes una vez. ¿Cuántos juegos habrá? Haz una lista sistemática de todas las parejas en el torneo.

2. En la clase de ciencias se asigna a Ally, Brevin, Carol y Doug para sentarse uno junto al otro en la primera fila.

a. Enumera todos los arreglos en los cuales Ally se sienta en el primer asiento, después todos los arreglos en los cuáles Brevin se sienta en el primer asiento, y así sucesivamente.

A primero	B primero	C primero	D primero
ABCD ABDC			

b. ¿Cuántos arreglos diferentes hay?

Usar un patrón o atajo para encontrar el tamaño de un espacio muestral sin tener que enumerar cada resultado

3. El entrenador de un equipo de béisbol es responsable de asignar el orden de bateo para los nueve jugadores.

a. Explica cómo puedes encontrar el número de diferentes arreglos de bateo *sin* enumerar todas las posibilidades. ¿Cuántos arreglos de bateo son posibles?

b. ¿Cuántos arreglos de bateo diferentes son posibles si uno de los nueve jugadores, el lanzador, siempre batea en noveno lugar?

4. Supón que un entrenador de baloncesto tiene 12 jugadores. *Sin* enumerar todas las posibilidades, explica cómo puedes encontrar el número de diferentes equipos de cinco integrantes que podría crear el entrenador. ¿Cuántos equipos son posibles?

Determinar la probabilidad de un evento

5. En la Pregunta 1, determinaste todos los posibles pares para un torneo de ajedrez de rondas individuales. Imagina que cada pareja se escribe en una tira de papel. Las tiras se colocan en un recipiente y se mezclan. Se escoge una tira al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los nombres escogidos sean Doug y Evan?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Doug o Evan (o ambos) estén incluidos en el par escogido?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los nombres escogidos no contengan ni a Doug ni a Evan?

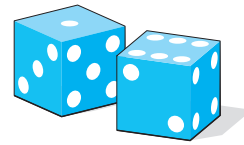
6. En la Pregunta 2, enumeraste todas las formas en que cuatro alumnos podrían acomodarse en una fila. Usa tu lista para responder estas preguntas.

a. Si los asientos se asignan al azar para los cuatro alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que Brevin y Carol se sienten uno junto al otro?

b. Si los asientos se asignan al azar para los cuatro alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que Doug se siente en uno de los extremos de la fila?

Usar la probabilidad para determinar si un juego es justo

7. Héctor está tratando de inventar un juego para dos personas que implica lanzar dos dados y sumar los resultados. Está considerando algunas reglas para la puntuación.



a. Supón que el Jugador 1 anota 1 punto por sacar una suma de 2, 3, 4, 9, 10, 11 ó 12, y el Jugador 2 anota 1 punto por cualquier otra suma. ¿Es justo este juego? Explica.

b. Supón que el Jugador 1 anota 1 punto cuando la suma es 6, 7 u 8. De lo contrario, el Jugador 2 anota 1 punto. ¿Es justo este juego? Explica.

c. Supón que el Jugador 1 anota 3 puntos cuando la suma es 11 ó 12, y el Jugador 2 anota 1 punto cuando la suma es 3, 4 ó 5. Para el resto de las sumas, ninguno de los jugadores anota. ¿Es justo este juego? Explica.

Usar la probabilidad para tomar decisiones

8. *¿Más alto o más bajo?* es un juego en el cual los dos contrincantes se turnan para adivinar si la suma de los números en un par de dados será mayor que 7 ó menor que 7. El procedimiento para jugar cada turno es como sigue:

- Cada jugador lanza un dado. El jugador que tiene que adivinar lanza su dado a plena vista; el otro jugador oculta su resultado.
- El jugador que tiene que adivinar entonces adivina si la suma es "mayor que 7" o "menor que 7". La suposición se hace con conocimiento de lo que aparece en uno de los dados pero no en el otro.
- El jugador que tiene que adivinar anota 1 punto si la suposición fue correcta. El otro jugador anota 1 punto si la suposición fue incorrecta. Si la suma es 7, no se anota ningún punto.

Supón que tú eres el jugador que tiene que adivinar si es mayor o menor.

a. El primer dado muestra un 2. ¿Debes suponer que la suma será "mayor que 7" o "menor que 7"? ¿Cuál es la probabilidad de que estarás en lo correcto?

b. El primer dado muestra un 4. ¿Debes suponer que la suma será "mayor que 7" o "menor que 7"? ¿Cuál es la probabilidad de que tengas razón?

Demuestra tus destrezas

9. Supón que tienes siete sillas en una fila. ¿Cuántos diferentes arreglos son posibles para que se sienten siete personas?

10. En las hamburguesas de Barak puedes ordenar una hamburguesa con hasta siete condimentos diferentes: mostaza, salsa de tomate, pepinillos, cebolla, tomate, lechuga y mayonesa. ¿Cuántas hamburguesas diferentes son posibles, incluyendo una hamburguesa simple sin ningún condimento?

11. El juego de lotería *21 y 5* requiere que los jugadores hagan coincidir 5 números que se rifan al azar de un total de 21. ¿Cuántos grupos de 5 números diferentes son posibles?